Exercice 1

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x\ln(x)-x+1$

et soit (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm .

1) Etudier les limites de g à droite de 0 et en $+\infty$.

2) a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation .

b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x-1}$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier les limites de f à droite en 1 et en $+\infty$.

2) Dresser le tableau de variation de f .

3) Construire la courbe (C_f).

Partie C :

1) Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}$ admet une solution unique α dans $]1;+\infty[$ et que $3,5<\alpha<3,6$.

2) On considère la fonction h définie sur $]1;+\infty[$ par : $h(x)=\ln(x)+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que α est solution de l'équation $h(x)=x$.

b) Etudier le sens de variation de h .

c) On pose $I=[3;4]$. Montrer que : $\forall x\in I;\ h(x)\in I\ \ et\ \ |h'(x)|\le\dfrac{5}{6}$

3) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=h(u_n)\ \ ;n\in\mathbb{N}\end{cases}$

a) Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N};\ |u_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{5}{6}|u_n-\alpha|$

b) Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N};|u_n-\alpha|\le\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$.

Exercice 2

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f_n(x)=nx+\ln x$.

Soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to0^+}f_n(x)\ \ et\ \ \lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$

b) Etudier les branches infinies de la courbe (C_n)

2) a) Etudier les variations de la fonction f_n.

b) Construire la courbe (C_1) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3) a) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution u_n dans $]0,+\infty[$ et que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n<1$$

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ f_n(u_{n+1})=-u_{n+1}$ et en déduire la monotonie de la su $(u_n)_{n\geq 1}$.

4) a) Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[): x>\ln x$, et en déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ u_n<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$ et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{nu_n}{\ln(n)}=1$.

Exercice 3

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n\geq 3$. On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f_n(x)=x-n\ln(x).$$

1) a) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$

b) Etudier les variations de la fonction f_n et dresser son tableau de variation.

c) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet exactement deux solutions u_n *et* v_n dans $]0,+\infty[$ telles que $0<u_n<n<v_n$.

2) a) Montrer que : $(\forall n\geq 3); 1<u_n<e$.

b) Montrer que : $(\forall n\geq 3);\ f_n(u_{n+1})=\ln(u_{n+1})$

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

d) En encadrant $\ln(u_n)$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

e) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(u_n)}{u_n-1}=1$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} n(u_n-1)=1$

3) a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

b) Calculer $f_n(n\ln(n))$ puis montrer que : $(\forall n\geq 3);\ n\ln(n)<v_n$.

4) Montrer que : $(\forall x>0);\ x>2\ln x$

5) a) Déterminer le signe de $f_n(2n\ln(n))$ pour $n\geq 3$.

b) Montrer que : $(\forall n\geq 3)$; $n\ln(n)<v_n<2n\ln(n)$.

c) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_n}{n\ln(n)}=1$

Exercice 4

I – On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)$$

1) Calculer $\lim_{x\to(-1)^+} g(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2) Dresser le tableau de variation de la fonction g

3) Etudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x \in \left]-1,+\infty\right[$.

II – On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)$

1) Calculer et interpréter graphiquement les limites : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=e^{-x}g\left(e^{x}\right)$.

3) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $0\le f(x)\le 1$.

5) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=f(x)-x$.

a) Montrer que la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha\in\left]0,1\right[$.

III – Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n) ; (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0\le u_n\le 1$

2) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\left|u_{n+1}-\alpha\right|\le\frac{3}{5}\left|u_n-\alpha\right|$ (Remarquer que $g(e)\simeq -0,58$).

3) En déduire que (u_n) est une suite convergente et calculer sa limite.