Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x + e^{nx}$.

Et Soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier les variations de la fonction f_n.

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $\mathbb{R}$.

3) Montrer que $\alpha_1 \in \left]-\ln 2, -\frac{1}{2}\right[$

4) Montrer que $(x - \alpha_1)$ *et* $(e^x + \alpha_1)$ ont le même signe sur $\mathbb{R}$.

5) On considère la fonction numérique g définie sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ par : $g(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$.

a) Montrer que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

b) En déduire que pour tout $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$: $\left|e^x + \alpha_1\right| \le \frac{1}{\sqrt{e}}\left|x - \alpha_1\right|$

6) On considère la suite numérique (β_n) définie par : $\beta_0 = -\frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_{n+1} = -e^{\beta_n}$.

a) Montrer qu'il existe un réel k tel que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \left|\beta_{n+1} - \alpha_1\right| \le k\left|\beta_n - \alpha_1\right|$

b) Montrer que la suite (β_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2

Partie 1 :

1/ En appliquant le théorème des accroissements finis sur la fonction $t \mapsto e^{-t}$, montrer que :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ \exists \theta \in]0;x[\ /\ e^{\theta} = \frac{x}{1 - e^{-x}}$$

2/ En déduire que :

a/ $\forall x > 0;\ 1 - x < e^{-x}$

b/ $\forall x > 0;\ x + 1 < e^{x}$

c/ $\forall x > 0;\ 0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right) < x$

Partie 2 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}\ ;\ x > 0 \end{cases}$

Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ a/ Montrer que la fonction f est continue à droite en 0

b/ Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - x\right] = 0$ puis interpréter ce résultat graphiquement

2/ a/ Montrer que : $\forall x \geq 0;\ x - \frac{x^2}{2} \leq -e^{-x} + 1$

(On pourra utiliser le résultat de la question 2/a/ de la partie 1)

b/ En déduire que : $\forall x \geq 0;\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$

3/ a/ Vérifier que : $\forall x > 0;\ \frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{-x}+x-1}{x^2} \times f(x)$

b/ En déduire que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-1}{x} = \frac{1}{2}$ et interpréter ce résultat

4/ a/ Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et que :

$$\forall x > 0;\quad f'(x) = \frac{e^x\left(e^x - 1 - x\right)}{\left(e^x - 1\right)^2}$$

b/ En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

(On pourra utiliser le résultat de la question 2/b/ de la partie 1)

<u>Partie</u> 3 :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \ln\left[f(u_n)\right] \end{cases};\ n \in \mathbb{N}$

1/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n > 0$.

2/ Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante puis en déduire qu'elle est convergente.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2/b/ de la partie 1)

3/ a) Montrer que 0 est l'unique solution de l'équation : $\ln\left[f(x)\right] = x$

b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}\,e^{-x}$.

1) a) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et étudier les variations de la fonction f.

2) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $g(x) = 2x + \ln x$.

a) Montrer que : $\left(\forall x \in]0,+\infty[\right);\ f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$

b) Montrer que : $\left(\exists! \alpha \in]0,+\infty[\right);\ \alpha \in \left]\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right[\ et\ g(\alpha) = 0$

c) On pose $I = \left]\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right[$. Montrer que $f(I) \subset I$ et que : $\left(\forall x \in I\right);\ \left|f'(x)\right| \leq \frac{1}{8}$.

3) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n); (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in I$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{8}|u_n - \alpha|$

c) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{8}\right)^n |u_0 - \alpha|$

d) Calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$

e) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $|u_n - \alpha| < 10^{-4}$

Exercice 4

I – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = xe^x - nx$.

Soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1) Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_n(x) = (x+1)e^x - n$

a) Etudier les variations de la fonction g_n.

b) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $\mathbb{R}$ et que $0 \leq \alpha_n \leq \ln(n)$.

c) Montrer $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \alpha_n = \ln\left(\frac{n}{1+\alpha_n}\right)$

2) a) Montrer que : $(\forall x \in]0,+\infty[); \ln x \leq x - 1$.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{\ln(n)}{2} \leq \alpha_n$

c) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n$ *et* $\lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$

II – 1) a) Etudier les variations de la fonction f_n.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); f_n(\alpha_n) = \frac{-n(\alpha_n)^2}{1+\alpha_n}$

2) Montrer que la courbe (C_n) admet une asymptote oblique (D_n) dont on déterminera l'équation Réduite.

3) Etudier la position relative de la courbe (C_n) et l'axe des abscisses.

4) Etudier la position relative des courbes (C_n) *et* (C_{n+1}).

5) a) Montrer que $\frac{7}{20} \leq \alpha_2 \leq \frac{2}{5}$ puis en déduire un encadrement de $f_2(\alpha_2)$.

b) Construire les courbes (C_1) *et* (C_2) dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

III – On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}); c_n = (1-\alpha)^n$ *et* $S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$; (*où* $\alpha \in]0,1[$)

1) Montrer que les suites (c_n) *et* (S_n) sont convergentes et déterminer leurs limites.

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{c_n}{u_n} \ (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n > 0$.

b) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n \leq u_0 + \dfrac{1}{\alpha u_0}$.

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente