Exercice 1

1) Soient z et z' deux nombres complexes tels que : $|z|=|z'|=1$.

Montrer que $\dfrac{zz'-1}{z'-z}\in\mathbb{R}$ *et* $\dfrac{z^2-1}{z}\in i\mathbb{R}$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=1$ *et* $z_B=2-i$.

Déterminer les affixes des points M tels que le triangle ABM soit équilatéral

Exercice 2 (SR2010)

le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-4iz-2+2i\sqrt{3}=0$

a) Etablir que le nombre complexe $a=1+i\left(2-\sqrt{3}\right)$ est une solution de l'équation (E).

b) En déduire la deuxième solution b de l'équation (E).

2) a) Montrer que : $a^2=4\left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe a.

3) On considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $c=2i+2e^{i\frac{\pi}{7}}$.

Et soit (Γ) le cercle dont l'un des diamètres est le segment [AB].

a) Déterminer l'affixe du point Ω le centre du cercle (Γ).

b) Montrer que les points O et C appartiennent au cercle (Γ).

c) Montrer que le nombre complexe $\dfrac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pur

Exercice 3 (SN2009)

Soit m un nombre complexe tel que $m\neq 1$.

I – On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z,

$$(E): z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$$

1) a) Vérifier que le discriminent de l'équation (E) est : $\Delta=\left((1+i)(m-1)\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

c) Donner la forme algébrique des deux valeurs du nombre complexe m pour que le produit des deux solutions de l'équation (E) soit égal à 1.

2) On pose $z_1=1-im$ et $z_2=m-i$.

Dans le cas où $m=e^{i\theta}$ où $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$, Donner les écritures trigonométriques de z_1 et z_2.

II – Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, on considère les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectives m, $z_1=1-im$ *et* $z_2=m-i$.

1) Déterminer l'ensemble des points M tel que les points M, M_1 et M_2 soient alignés.

2) a) Montrer que la transformation R qui associe à chaque point M d'affixe z, le point M' d'affixe $z'=1-iz$ est une rotation dont on déterminera l'abscisse de son centre et une mesure de son Angle.

b) Montrer que le nombre complexe $\dfrac{z_2-z_1}{z_2-m}$ est imaginaire pur, si et seulement si

$$\mathrm{Re}(m)+\mathrm{Im}(m)=1.$$

c) En déduire l'ensemble des points M tel que les points Ω, M, M_1 et M_2 soient cocycliques.

Exercice 4 (SR2003)

Soit θ un nombre réel tel que $0\leq\theta\leq 2\pi$. On pose : $p=5\cos\theta+3i\sin\theta$.

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-2pz+16=0$.

1) a) Vérifier que : $p^2-(3\cos\theta+5\sin\theta)^2=16$

b) Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) telles que : $|z_1|<|z_2|$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2.

Montrer que lorsque θ varie dans l'intervalle $[0,2\pi]$ alors le point M_1 varie sur le cercle (C) dont il faut déterminer une équation .

3) a) Montrer que pour tous les nombres complexes a et b de $\mathbb{C}-\{4\}$, on a :

$$\left(\frac{b+4}{b-4}\right)=-\left(\frac{a+4}{a-4}\right)\Leftrightarrow ab=16$$

b) En déduire que : $\left(\dfrac{z_2+4}{z_2-4}\right)=-\left(\dfrac{z_1+4}{z_1-4}\right)$.

c) Soient F et F' d'affixes respectives 4 et -4.

Montrer que : $\left(\overrightarrow{M_1F},\overrightarrow{M_1F'}\right)\equiv\pi+\left(\overrightarrow{M_2F},\overrightarrow{M_2F'}\right)[2\pi]$.

Exercice 5

Soit u un nombre complexe tel que $u\neq 1-i$.

1) a) Développer $(iu-1-i)^2$.

b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z :

$$z^2-2(u+1-i)z+2u^2-4i=0$$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points :

$$\mathrm{A}((1+i)u-2i),\ B((1-i)u+2),\ \mathrm{U}(u)\text{ et }\Omega(2-2i)$$

a) Déterminer l'affixe du point I le milieu du segment $[AB]$ puis déterminer le vecteur de la translation t qui transforme le point U en I.

b) Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. Montrer que $\mathrm{R}(\mathrm{A})=\mathrm{B}$.

c) En déduire que les deux droites $(\Omega\mathrm{I})$ et (AB) sont perpendiculaires.

d) A partir du point U Expliquer la méthode de construction des points A et B.

3) On pose : $u=a(1-i)-2i$ où $a\in\mathbb{R}$.

a) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ en fonction de a.

b) En déduire que les points A, B et U sont alignés.