Exercice 1 (SN2004)

I – Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{1+e^x}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a: $\frac{1}{1+e^{-x}}=1-\frac{1}{1+e^x}$.

b) En déduire que f est une fonction impaire.

2) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

3) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a: $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

c) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$ on a : $1-\frac{2}{e^x+1}\leq\frac{1}{2}x$.

4) Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right]=0$ et interpréter géométriquement ce résultat.

5) Construire la droite (Δ) d'équation $y=1-\frac{1}{2}x$ et la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

II – On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=1-\frac{2}{e^{u_n}+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $u_n>0$.

2) a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ puis calculer $\lim_{n\to+\infty}u_n$

Exercice 2 (SR2009)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)=x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$

b) Montrer que la fonction est paire et que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)-x=\frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et que $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}=0$ et en déduire que la droite (D) d'équation $y=x$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

2) Montrer que la courbe (C_f) est en dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

3) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f'(x)=\frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$ et vérifier que $f'(0)=0$.

b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0,+\infty[$ on a : $e^{4x}-1\geq 0$, et en déduire que pour tout x de l'intervalle $[0,+\infty[$ on a : $e^{4x}-1+4xe^{2x}\geq 0$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

4) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (On admet que la courbe posséde deux points d'inflexion que l'on ne demande pas de préciser)

Exercice 3 (SN2010)

I – On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1+4xe^{2x}$.

1) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$

2) Montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ et est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

3) a) Montrer que $g\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{2}{e}$ et vérifier que $g\left(-\frac{1}{2}\right)>0$.

b) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $g(x)>0$.

II – Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$.

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm

1) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f'(x)=g(x)$ et en déduire que la fonction f est strictement Croissante sur $\mathbb{R}$.

3) a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que la courbe admet une branche parabolique de direction Asymptotique celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

b) Calculer $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ et en déduire que la droite (Δ) d'équation $y=x+1$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ) et la courbe (C_f) puis montrer que la courbe (C_f) est en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ et qu'elle est au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

4) a) Montrer que $y=x$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C_f) A l'origine du repère O.

b) Montrer que la courbe (C_f) possède un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

(Il n'est pas demandé de déterminer son ordonnée)

5) Construire les droites (Δ) et (T) et la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 4 (SN2011)

I – On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=(1-x)e^x-1$

1) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $g'(x)=-xe^x$

b) Montrer que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et est croissante sur l'intervalle $]-\infty,0]$ et vérifier que $g(0)=0$.

2) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $g(x)\le 0$.

II – Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(2-x)e^x-x$.

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm).

1) a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ et en déduire que la courbe (C_f) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction.

2) a) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et calculer $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y=-x$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

3) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f'(x)=g(x)$.

b) Interpréter géométriquement le résultat : $f'(0)=0$

c) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variations.

4) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

5) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)+x=0$ et en déduire que la courbe (C_f) et la droite (D)

Se coupent au point $A(2,-2)$.

b) Etudier le signe sur $\mathbb{R}$ de $f(x)+x$.

c) En déduire que la courbe (C_f) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty,2[$ et est en-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]2,+\infty[$.

6) a) Montrer que la courbe (C_f) possède un point d'inflexion unique de coordonnées $(0,2)$.

b) Construire la droite (D) et la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.