

Exercice 1

On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n \geq 1}$ de raison $r = 3$ et de premier terme $u_1 = 4$.

1/ Calculer u_5 et u_{21} .

2/ Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{21}$.

3/ Montrer que u_1, u_5 et u_{21} sont dans cet ordre des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 3}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Et la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}; n \in \mathbb{N}$

1/ Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n > 0$

2/ Calculer v_0 et v_1 et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; v_n \neq 1$

3/ a/ Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison .

b/ Déterminer v_n puis u_n en fonction de n .

c/ Donner l'expression de la somme $S_n = \sum_{k=1}^n v_k$ en fonction de n .

Exercice 3

On considère la suite (a_n) définie par :
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + n + 3; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
, et la suite (b_n) définie par :

$$b_n = a_n - n; n \in \mathbb{N}.$$

1/ Montrer que la suite (b_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme .

2/ Déterminer b_n , et montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

3/ a/ Calculer les sommes : $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 99$ et $T = 1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{99}$.

b/ En déduire la valeur de la somme $U = \sum_{k=0}^{99} u_k$.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < 3$

2/ a/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 3 - u_{n+1} = \frac{3 - u_n}{3 + u_{n+1}}$



b/ En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < 3 - u_{n+1} < \frac{1}{3}(3 - u_n)$

c/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < 3 - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3/ On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (3 - u_k)$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

a/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < S_n < \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]$

b/ En déduire un encadrement de T_n en fonction de n .

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels tels que $a \neq 0$ et soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = f(n+1) - f(n)$

1/ Donner l'expression de v_n en fonction de n

2/ Montrer que (v_n) est une suite arithmétique

3/ Calculer par deux méthodes différentes, en fonction de n , la somme $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

Exercice 6

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{1}{u_n}$

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n .

2) Soit (w_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); w_n = 2^{v_n}$.

a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) Calculer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=0}^n w_k$

Exercice 7

On considère les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}); v_n = 2u_n - n$$

1) Calculer u_1 et montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq \frac{n}{2}$

2) Etudier la monotonie de la suite (u_n) .

3) a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.



b) Déterminer v_n en fonction de n .

4) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 2^n + \frac{1}{2}n$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); \sum_{k=0}^n u_k = 2^{n+1} - 1 + \frac{n(n+1)}{4}$

Exercice 8

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = -1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{4 + u_n}{5 - u_n}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); -1 \leq u_n < 2$

2) Etudier la monotonie de la suite (u_n) .

3) On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{1 + u_n}{2 - u_n}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n .

4) Soit (w_n) la suite numérique définie par : $w_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); w_{n+1} = \left(u_n + \frac{5}{n+1}\right)w_n$.

On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}); a_n = \frac{w_n}{n+1}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n w_k$.

a) Montrer que (a_n) est une suite géométrique

b) Déterminer a_n puis w_n en fonction de n .

c) Montre que : $(\forall n \in \mathbb{N}); S_n = (n+1)a_{n+1} - \sum_{k=0}^n a_k$ puis déterminer S_n en fonction de n .