Exercice 1

I - On considère la fonction g définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $g(x)=2x^2+1-\ln x$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

2) Montrer que : $\forall x>0; g'(x)=\dfrac{4x^2-1}{x}$ puis dresser le tableau de variation de la fonction g.

3) En déduire le signe de $g(x)$ pour chaque x de $]0;+\infty[$.

II - Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=2x-2+\dfrac{\ln x}{x}$,

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et donner une interprétation graphique de ce résultat.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=2x-2$ asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

c)Etudier la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite (Δ).

4) a) Montrer que : $\forall x\in]0;+\infty[;\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

5) a) Montrer que : $\forall x\in]0;+\infty[;\ f''(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$.

b) Etudier la concavité de la courbe (C_f).

6) Construire la courbe (C_f).

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x\left[(\ln x)^2-2\ln x+2\right]; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2=0$ puis étudier la continuité de f à droite de 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0 et interpréter ce résultat graphiquement

2) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de (C_f) en $+\infty$

3) a) Montrer que : $\forall x\in]0;+\infty[;\ f'(x)=(\ln x)^2$

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0=e$.

b) Montrer que : $\forall x\in]0;+\infty[;\ f(x)-x=x(\ln x-1)^2$.

c) Etudier la position de la courbe (C_f) par rapport à la tangente (T).

5) Construire la courbe (C_f).

6) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n); n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; 1 < u_n < e$.

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite.

Exercice 3

A - On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2\sqrt{x} - \ln x - 2$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

2) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3) Etudier le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

B - On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x}\ln x \; ; \; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que la fonction f est continue à droite de 0 .

2) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 puis donner une interprétation graphique à ce Résultat.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - x$ et donner une interprétation au résultat.

b) Etudier la position relative de la courbe (C_f) avec la droite $(\Delta) : y = x$.

4) a) Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[; f'(x) = \dfrac{g(x)}{2\sqrt{x}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

5) a) Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[; f''(x) = \dfrac{\ln x}{4x\sqrt{x}}$.

b) Etudier la concavité de la courbe (C_f).

6) Construire la courbe (C_f).

7) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_0 = \dfrac{1}{2}$ et $v_{n+1} = f(v_n)$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; \dfrac{1}{2} \le v_n < 1$.

b) Etudier la monotonie de la suite (v_n).

c) Montrer que (v_n) est convergente et calculer sa limite