Exercice 1 (SN2005)

I – On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x)=(x+2)e^{-\frac{2}{x}} \ ; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, (unité graphique : 2 cm)

1) a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

b) Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0.

c) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que : $(\forall t\geq 0);\ 0\leq e^{-t}+t-1\leq \frac{t^2}{2}$

c) Montrer que : $(\forall x>0);\ \frac{-4}{x}\leq f(x)-x\leq \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$

d) En déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) dont il faut déterminer l'équation réduite.

3) Construire la courbe (Δ) et la droite (Δ).

II – Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x)=\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}} \ ; x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction f_n est dérivable à droite en 0.

2) Etudier les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

3) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x)=\frac{2}{n}$ admet une unique solution α_n dans $[0,+\infty[$

b) Montrer que : $(\forall x>0)(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}>f_n(x)-\frac{2}{n}$

c) En déduire que la suite (α_n) est décroissante, puis montrer qu'elle est convergente.

d) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ n\alpha_n=2e^{\frac{2}{\alpha_n}}-2$

e) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$

Exercice 2 (SR2006)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 $(n\geq 2)$.

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=\frac{x}{n}-e^{-nx}$

Et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer : $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$

b) Etudier les deux branches infinies de la courbe (C_n).

2) Déterminer $f_n'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f_n.

3) a) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α_n dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que : $f_n\left(\frac{1}{n}\right)<0$

c) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ e^x\geq x+1$, et en déduire que : $f_n(1)>0$.

d) Montrer que : $\frac{1}{n}<\alpha_n<1$

4) Construire la courbe (C_2). (On prendra : $\alpha_2\simeq 0,6$)

5) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1,2\});\ f_{n+1}(\alpha_n)=\frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(e^{\alpha_n}-\frac{1}{n}-1\right)$

b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\});\ f_{n+1}(\alpha_n)\geq 0$

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

6) a) En utilisant la question 3), montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\});\ \frac{1}{n^2}<e^{-n\alpha_n}<\frac{1}{n}$

b) Déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\});\ \frac{\ln n}{n}<\alpha_n<\frac{2\ln n}{n}$

c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n$

Exercice 3 (SR2007)

I – Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1+x-e^{-x}$

1) a) Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction g.

c) Déduire que $x_0=0$ est l'unique solution de l'équation $g(x)=0$ dans $\mathbb{R}$.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\frac{1}{1+x-e^{-x}}$ et (C_f) sa courbe

Représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to0^-} f(x)$

b) Déterminer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

d) Construire la courbe (C_f).

3) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Montrer que l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et qu'elle est convergente.

c) Etablir que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

II – 1) a) Montrer que l'équation $f(x)=1$ est équivalente à l'équation $e^x = x$.

b) Montrer que l'équation $e^x = x$ admet pour unique solution $\alpha = x_1$ tel que : $\frac{1}{e} \leq \alpha \leq 1$

2) On considère la suite numérique $(y_n)_{n\geq 1}$ définie par : $y_1 = 1 \; et \; \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : y_{n+1} = e^{-y_n}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$

b) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : \left|y_{n+1} - \alpha\right| \leq e^{-\left(\frac{1}{e}\right)} \left|y_n - \alpha\right|$

c) Déduire que la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite