Exercice 1

1) On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$g(x)=\ln(x+1)-\ln(x)-\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f(x)=\ln(x+1)-\ln(x)-\frac{1}{x+1}$$

a) Etudier les variations des fonctions f et g.

b) Déduire que : $(\forall k\in\mathbb{N}^*),\ \frac{1}{k+1}<\ln(k+1)-\ln(k)<\frac{1}{k}$

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n=+\infty$

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n)$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*),\ T_n>0$

b) Montrer que la suite numérique (T_n) est décroissante

c) En déduire que la suite (T_n) est convergente.

Exercice 2

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x\ln(x)-x+1$ et soit (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm)

1) Calculer $\lim_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2) Etudier les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variation

3) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x\in]0,+\infty[$

Partie B

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]1,+\infty[$ par : $h(x)=\frac{\ln x}{x-1}$ et soit (C_h) sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer les limites $\lim_{x\to1^+} h(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x)$

2) a) Montrer que h est dérivable sur $]1,+\infty[$ et montrer que : $(\forall x\in]1,+\infty[),\ h'(x)=-\frac{g(x)}{x(x-1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction h.

3) Construire la courbe (C_h) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4) Montrer que l'équation $h(x)=\frac{1}{2}$ admet une unique solution α dans $]1,+\infty[$ et que $3<\alpha<4$

Partie C

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1,+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

1) Montrer que α est solution de l'équation $f(x)=x$

2) a) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $I=[3,4]$

b) Montrer que $f(I)\subset I$ et que : $(\forall x\in I),\ |f'(x)|\leq\frac{5}{6}$

3) Soit (α_n) la suite numérique définie par : $\alpha_0=3$ et $(\forall n\in\mathbb{N}),\ \alpha_{n+1}=f(\alpha_n)$.

a) Prouver que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ |\alpha_{n+1}-\alpha|\leq\frac{5}{6}|\alpha_n-\alpha|$

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ |\alpha_n-\alpha|\leq\left(\frac{5}{6}\right)^n$

c) En déduire que la suite (α_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice 3 (Exercice 4 – SR Bac 2020)

Première partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0,1]$ par : $f(x)=x\ln(2-x)$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (On prendra $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$)

1) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I, et que :

$$(\forall x\in I),\ f'(x)=\ln(2-x)-\frac{x}{2-x}$$

b) Montrer que la fonction f' est strictement croissante sur l'intervalle I.

c) Montrer qu'il existe un unique nombre réel $\alpha\in]0,1[$ tel que : $f'(\alpha)=0$ et que $f(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2-\alpha}$

2) a) Etudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations.

b) Montrer que la courbe (C_f) est concave

c) Montrer que : $\left(\forall(x,t)\in I^2\right),\ f(x)\leq(x-t)f'(t)+f(t)$

d) En déduire que : $(\forall x\in I),\ f(x)\leq x\ln(2)$ et $f(x)\leq -x+1$

Deuxième partie :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $I=[0,1]$ par : $f_n(x)=x^n\ln(2-x)$

1) a) Vérifier que la fonction f_n est positive sur l'intervalle I et que $f_n(0)=f_n(1)$

b) Montrer qu'il existe au moins un nombre réel $\alpha_n\in]0,1[$ tel que : $f_n'(\alpha_n)=0$

2) a) Montrer que la fonction f_n est dérivable sur l'intervalle I et que :

$$(\forall x\in I),\ f_n'(x)=x^{n-1}g_n(x)\quad avec\quad g_n(x)=n\ln(2-x)-\frac{x}{2-x}$$

b) Montrer que la fonction g_n est strictement croissante sur l'intervalle I

c) En déduire que le nombre réel α_n est unique.

3) On considère la suite numérique $(\alpha_n)_{n\geq 2}$, ainsi définie

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2),\ f_n(\alpha_n)=\frac{1}{n}\left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{2-\alpha_n}\right)$, et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n)=0$

b) Montrer que : $(\forall n\geq 2),\ g_n(\alpha_{n+1})=-\ln(2-\alpha_{n+1})$, et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est convergente

d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$