Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left(x^2\right)-2\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \;;\; \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x-1}{\ln x+2} \;;\; \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^2-2\ln x+3 \;;\; \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} \;;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3x+2)}{\sqrt[3]{x}} \;;\; \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+3x)}{\sqrt{x}} \;;\; \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(x-3)} \;;\; \lim_{x\to 1^+} \frac{x\sqrt{\ln x}}{x-1} \;;\; \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}-\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \;;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\ln(1+2x)} \;;\; \lim_{x\to 0^+} (\ln x)\ln(\cos x) \;;\; \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^2\times\ln x} \;;\; \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln\left(1+3x-x^2\right)}{x} \;;\; \lim_{x\to 1^-} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\times\ln(1-x)$$

Exercice 2

On considère la fonction f de la variable aléatoire x définie par : $f(x)=\sqrt{(\ln x)^2-\ln x}$

Et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Calculer les limites de la fonction f aux bornes de D_f.

3) a) Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en $x_0=1$ et à droite en $x_1=e$.

b) Montrer que pour tout $x\in D_f-\{1,e\}$, on a : $f'(x)=\dfrac{2\ln x-1}{2x\sqrt{(\ln x)^2-\ln x}}$

c) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation

4) Etudier les branches infinies de la courbe (C_f).

5) Construire la courbe (C_f)

6) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $]0,1]$

a) Montrer que g est une bijection de $]0,1]$ dans un intervalle J que l'on déterminera.

b) Construire la courbe représentative de g^{-1}, sa fonction réciproque, dans le même repère.

c) Calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\sqrt{2}\right)$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\ln x$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\|=1cm$.

1) a) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$

b) Etudier les branches infinies de la courbe (C_f).

2) a) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

b) Montrer que la fonction f est une bijection de l'intervalle $]0,+\infty[$ dans un intervalle J qu l'on déterminera, puis dresser le tableau de variation de la fonction réciproque f^{-1} de f.

3) Calculer $f(0)$ et $f(1)$ puis construire les courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_{f^{-1}}\right)$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, On considère l'équation $\left(E_n\right): x+\ln x = n$

a) Montrer que $\left(E_n\right)$ admet une unique solution α_n dans $\left]0,+\infty\right[$.

b) Déterminer la valeur de α_1 et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$

5) a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right),\ f\left(\alpha_n\right) \leq f(n)$ et en déduire que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right),\ \alpha_n \leq n$

b) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right),\ n-\ln(n) \leq \alpha_n$

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n - n}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{n-\ln(n)}$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]-1,+\infty\right[$ par : $f(x) = x-\ln(x+1)$ et soit $\left(C_f\right)$

Sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Etudier les variations de la fonction f.

b) Etudier les branches infinies de la courbe $\left(C_f\right)$.

c) Construire la courbe $\left(C_f\right)$.

2) a) Montrer que : $\left(\forall x \in [0,1]\right),\ f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$

b) Déduire que : $\left(\forall x \in [0,1]\right)\left(\forall y \in [0,1]\right),\ |f(x)-f(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x-y|$

3) On considère la suite numérique $\left(u_n\right)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \left(\forall n \in \mathbb{N}\right),\ u_{n+1} = u_n - \ln\left(1+u_n\right) \end{cases}$

a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right),\ u_n > 0$ *

b) Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente

c) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right),\ 0 < u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$