Exercice1

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les expressions suivantes :

1) $A_n = 1 + \cos x + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx)$ et $B_n = \sin x + \sin(2x) + \ldots + \sin(nx)$

(on pourra calculer $A_n + iB_n$)

2) $C_n = \cos^2 x + \cos^2 x\cos(2x) + \cos^3 x\cos(3x) + \ldots + \cos^n x\cos(nx)$

Et $S_n = \cos x\sin x + \cos^2 x\sin(2x) + \cos^3 x\sin(3x) + \ldots + \cos^n x\sin(nx)$

(on pourra calculer) $C_n + iS_n$

Exercice 2

Soit a un nombre complexe non nul.

I - On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^2 + \left[(1-a)i - a\right]z + a + a^2 i = 0$

1/Développer le nombre complexe : $\left[(1+a)i - a\right]^2$

2/Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

3/Montrer que :

l'équation (E) admet une unique solution dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $a = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

II - On suppose que $a \neq -1, a \neq -i$ et $a \neq \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et on considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives $a, ai, a-i$ et $-i$.

1/Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si on a $\arg(a) \equiv \frac{3\pi}{4}[\pi]$

2/On suppose que $a = e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi;\pi[$ et $\theta \neq \frac{3\pi}{4}$ et $\theta \neq -\frac{\pi}{2}$

a/Donner l'écriture trigonométrique du nombre complexe $1+a$.

b/Montrer que

les points A, B, C et D sont cocycliques si, et seulement si $\arg(a) \equiv \frac{\pi}{6}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$.

3/On pose dans cette question : $a = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et on considère la rotation R de centre D et qui transforme C en B.

a/Déterminer une mesure de l'angle de la rotation R.

b/Donner l'écriture complexe de la rotation R.

c/Déterminer l'affixe ω du point Ω l'image du point A par la rotation R.

Exercice 3

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^2 - az + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$ où a est un paramètre complexe. On note z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E).

1/Sans résoudre l'équation (E), montrer que : $|z_1| \times |z_2| = 1$ et que

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi].$$

2/a/On pose $z_1 = e^{i\theta}$. Montrer que : $a = 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \times e^{i\frac{\pi}{6}}$

b/En déduire que si $z_1 = i$ alors $1 + ia - a^2 - ia^3 + a^4 + ia^5 = 0$.

3/On pose $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et on considère les points $A(a), M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$.

a/Déterminer la nature de OM_1M_2 et de OM_1AM_2

b/En déduire le module et un argument du nombre complexe a.

Exercice 4

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a = 1 + 2i$. Soit φ l'application de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C};\ \varphi(z) = \frac{1}{6}\left[(3+4i)z + 5\overline{z}\right].$$

1/Montrer que l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ tels que $\varphi(z) = 0$ est la droite (OA).

2/Montrer que l'ensemble (D) des points $M(z)$ tels que $\varphi(z) = z$ est la droite d'équation $x - 2y = 0$.

3/Montrer que pour tout z de $\mathbb{C}$, le point d'affixe $\varphi(z)$ appartient à la droite (D).

4/a/Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C};\ \frac{\varphi(z) - z}{a} = \frac{z + \overline{z}}{6} + i\frac{z - \overline{z}}{3}$

b/En déduire que

$$(OA) \parallel (MM') \text{ où } M(z) \text{ et } M'(\varphi(z)) \text{ et } M' \neq M \text{ pour tout } z \text{ de } \mathbb{C}$$

5/Soit M et M' deux points d'affixes respectives z et $\varphi(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

En étudiant les deux cas $M \in (D)$ et $M \notin (D)$, donner une méthode pour construire le point M' à partir du point M.

Exercice 5

1) On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$(E): 4z^3 + (2-4i)z^2 - (5+3i)z + 2 - 4i = 0$$

a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $24+10i$

b) Déterminer le nombre réel y tel que le nombre complexe yi est une solution de l'équation (E)

c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E)

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère

Les points A, B et Ω d'affixes respectives $a = 1+i$, $b = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ et $\omega = -\frac{1}{2}i$

Et soit r la rotation de centre Ω qui transforme A en B et soit s la symétrie centrale

De centre le point I milieu du segment $[AB]$

a) Vérifier que $\frac{b-\omega}{a-\omega} = i$ et en déduire une mesure de l'angle de la rotation r

b) Déterminer c l'affixe du point C pour que le quadrilatère ΩACB soit un carré

c) Vérifier que $r \circ s(A) = A$ puis montrer que $r \circ s$ est une rotation dont on déterminera une mesure de l'angle