Exercice 1 (SR2010)

Partie I :

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=x+1-e^{x}$.

1) Déterminer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction h.

2) En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $h(x)\leq 0$.

Partie II :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^{2}+2x-2e^{x}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation graphique au résultat.

b) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation graphique au résultat.

2) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x)=2h(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $-2,2<\alpha<-2$.

b) Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion **I** d'abscisse 0.

c) Calculer $f'(0)$ puis déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point **I**.

d) Construire la droite (T) et la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 2

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(x-2)e^{x}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ et interpréter ce résultat géométriquement.

b) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis déterminer la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

2) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $f'(x)=(x-1)e^{x}$ et dresser le tableau de variation de la Fonction f sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère.

3) a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

b) Construire la courbe $\left(C_f\right)$ et la tangente (T) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Exercice 3

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=e^{x+1}-x-3$$

Et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y=-x-3$ est une asymptote oblique à la courbe $\left(C_f\right)$ au voisinage de $-\infty$.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ et en déduire que courbe $\left(C_f\right)$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$, dont on déterminera la direction.

3) a) Déterminer $f'(x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.

4) Construire la courbe $\left(C_f\right)$ et la droite (D) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Exercice 4 (SN2014)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(x-1)^2e^x$$

Et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique au résultat.

c) Etablir que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a : $f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2x^2e^x$.

d) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ puis interpréter le résultat géométriquement.

2) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $f'(x)=\left(x^2-1\right)e^x$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f(-1)$ *et* $f(1)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\left(x^2-4x+5\right)e^x$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4) Dans la figure ci-dessous, $\left(C_f\right)$ est la courbe de la fonction f.

a) En utilisant la question 3), calculer l'aire du domaine plan hachuré dans la figure.

b) Déterminer graphiquement, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=1$.