Exercice 1 (SN2010)

Partie I :

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $g(x) = -1 + x + 2x\ln x$.

1) Calculer les limites : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $g'(x) = 3 + 2\ln x$.

b) Etudier le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation la fonction g sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

c) Déterminer $g(1)$ et montrer que $g(x) \le 0$ pour tout $x \in]0,1]$ et que $g(x) \ge 0$ pour tout $x \in [1,+\infty[$.

Partie II :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - x + x^2 \ln x$$

1) a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

b) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique au résultat.

2) a) Vérifier que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $f'(x) = g(x)$.

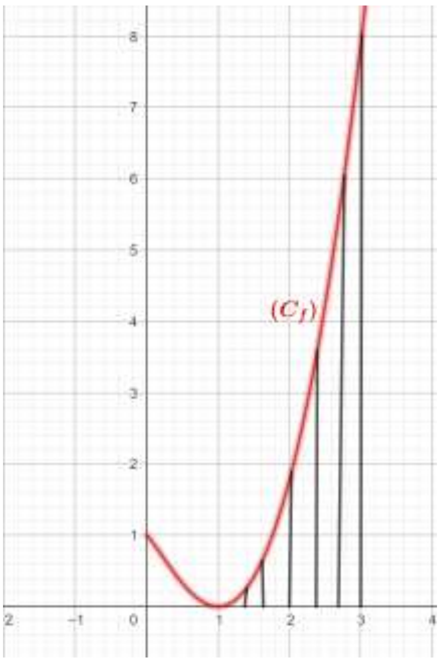
b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) Dans la figure ci-après (C_f) désigne la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $]0,3]$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) En utilisant une intégration par parties,

Montrer que : $\int_1^3 x^2 \ln x\, dx = 9\ln 3 - \frac{26}{9}$

B) En déduire l'aire du domaine plan hachuré dans la figure ci-contre.



Exercice 2

On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle x définies sur l'intervalle $]0,+\infty[$

Par : $f(x)=-x+\dfrac{\ln x}{x}$ et $g(x)=-x^2+1-\ln x$

Partie I :

1) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $g'(x)=-\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)$ puis déterminer le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

2) a) Déterminer $g(1)$ et dresser le tableau de variation de la fonction g. (Il n'est pas demandé de calculer les limites de g).

b) En déduire que : $(\forall x\in]0,1])\ ;\ g(x)\geq 0\ \ et\ \ (\forall x\in]1,+\infty[)\ ;\ g(x)<0$.

3) Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\ \ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$

Partie II :

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et interpréter ce résultat graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) d'équation $y=-x$.

c) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ).

2) Calculer $f(1)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (On admet que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse $e^{\frac{3}{2}}$ et que $e^{\frac{3}{2}}\simeq 4,5\ et\ f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\simeq -4$)

Exercice 3

Partie I :

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x-1+2\ln x$

1) Calculer les limites : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $g'(x)=\dfrac{x+2}{x}$.

b) Etablir que $(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\ \ g'(x)>0$ puis dresser le tableau de variation la fonction g.

c) Déterminer $g(1)$ et montrer que $g(x)\leq 0$ pour tout $x\in]0,1]$ et que $g(x)\geq 0$ pour tout $x\in [1,+\infty[$.

Partie II :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln^2(x)-\ln(x)+x$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ et interpréter ce résultat graphiquement.

b) Etudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) Soit (D) la droite d'équation $y=x$.

a) Résoudre dans l'intervalle $]0,+\infty[$, l'équation : $(\ln x)(\ln x-1)=0$.

b) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D) sur $]0,+\infty[$.

4) a) Montrer que $f''(x)=\dfrac{3-2\ln x}{x^2}$ pour tout $x\in]0,+\infty[$.

b) Montrer que le point d'abscisse $e^{\frac{3}{2}}$ est un point d'inflexion à la courbe (C_f).

5) a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

b) Construire les droites (T) *et* (D) et la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie III :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=\sqrt{e} \\ u_{n+1}=f(u_n),\ (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;1\le u_n\le\sqrt{e}$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante .

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4

On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=-1+\frac{1}{x}-2\ln x$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$

b) Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Calculer les limites : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Interpréter géométriquement le résultat.

3) a Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $f'(x) = -\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\right)$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.

4) a) Montrer que $f''(x) = 2\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ et en déduire la convexité de la courbe (C_f).

b) Recopier le tableau suivant sur votre copie et le compléter :

x	$\frac{1}{2}$	1	e
$f(x)$			

c) Montrer que $y = -3x+3$ est une équation cartésienne de la tangente à la courbe (C_f) au point $A(1,0)$.

5) Construire les points de la courbe (C_f) d'abscisses $\frac{1}{2}$, 1 *et* e et la tangente à la courbe (C_f) au point A puis construire la courbe (C_f) (On prend : $\frac{1}{e} \simeq 0,4$ *et* $\ln 2 \simeq 0,7$)