Exercice 1

1) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x\sqrt{e^x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x$;

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}xe^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\ln x-e^{2x}-1$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}e^{\frac{x-1}{x}}$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $t^2+t-6<0$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $(\ln x)^2+\ln x-6=0$ et l'inéquation : $(\ln x)^2+\ln x-6>0$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquation : $e^{2x}+e^x-6\leq0$ et $e^{x+1}+e^{\frac{x+1}{2}}-6>0$.

Exercice 2

I - On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^{-x}+x-1$

1/ Etudier les variations de g.

2/ a/ Etudier le signe de g(x) pour chaque x de $\mathbb{R}$.

b/ En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $x+e^{-x}>0$.

II - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ a/ Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^*; f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}}$.

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et interpréter les résultats graphiquement.

2/ a/ Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=\dfrac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$.

b/ Dresser le tableau de variation de f.

3/ a/ Donner l'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0 .

b/ Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}; x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{1+g(x)}$.

c/ Etudier la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite $(\Delta): y=x$.

4/ Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ).

III - On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=f(u_n);n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1/ Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}; 0\leq u_n\leq1$.

2/ Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

3/ Etudier la convergence de la suite (u_n) et calculer sa limite .

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x + 2\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \ ; \ x < 0 \\ f(x) = \left(x - 2\sqrt{x}\right)e^{\sqrt{x}} \ ; \ x \geq 0 \end{cases}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm

1/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b/ Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

c/ Etudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

2/ a/ Montrer que la fonction f est continue en $x_0 = 0$

b/ Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$ et donner une interprétation graphique au résultat

3/ a/ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*);\ \begin{cases} f'(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x(x-1)} \ ; \ x < 0 \\ f'(x) = \left(\dfrac{x-2}{2\sqrt{x}}\right)e^{\sqrt{x}} \ ; \ x > 0 \end{cases}$

b/ Etudier le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$

c/ Dresser le tableau de variation de la fonction f

4/ a/ Etudier la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite (Δ)

b/ Construire la courbe (C_f) (On prendra $\ln 2 \simeq 0,7$; $\sqrt{2} \simeq 1,4$; $e^{\sqrt{2}} \simeq 4,1$)

5/ a/ En utilisant une intégration par partie, calculer l'intégrale $\int_{-2}^{-1} \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)dx$

b/ En déduire , en cm^2, l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C_f) et les droites d'équations $y = x$, $x = -2$ et $x = -1$

Exercice 4

I - On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^{2x} - 2x$

1/ Etudier les variations de u

2/ Calculer $u(0)$, puis donner le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x

II - Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \ln\left(e^{2x} - 2x\right)$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/a/Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$

b/ Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^*;\ \frac{h(x)}{x} = \left(\frac{e^{2x}}{x} - 2\right)\frac{\ln\left(e^{2x} - 2x\right)}{e^{2x} - 2x}$

c/ Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{h(x)}{x} = 0$ et donner une interprétation graphique de ce résultat

2/a/ Montrer : $\left(\forall x \in [0;+\infty[\right); 1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0 \quad et \quad h(x) = 2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)$

b/ En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

c/ Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$

d/ Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) d'équation : $y = 2x$

3/ Etudier les variations de h

4/ Construire dans le même repère la droite (Δ) et la courbe (C)

Exercice 5

Partie I :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x^2+1)(e^{2x} - e^{-x}) + 2x$

1) a) Montrer que $e^{-x} \leq e^{2x}$ pour tout $x \in [0, +\infty[$ et que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, +\infty[$

b) Montrer que $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-\infty, 0]$

2) a) Montrer que $g'(x) = 2(x^2 + x + 1)e^{2x} + (x-1)^2 e^{-x} + 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Puis en déduire que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$

b) Vérifier que $g(0) = 0$ et étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{2} + e^{-x} + ln(x^2+1) - 3$

Et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que $2\ cm$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \ et \ \lim\limits_{x \to +=} f(x)$

2) a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) Dresser le tableau de variations de f

3) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet deux branches paraboliques de direction l'axe des ordonnées

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,1]$ et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

5) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ (on prendra $\propto \cong 0{,}72$)

Partie III :

On pose $\mathbf{I} = \int_0^{\propto} \frac{1}{1+x^2} dx$

1) Montrer que : $\int_0^{\propto} \frac{x^2}{1+x^2} dx = \propto - \mathbf{I}$

2) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^{\propto} ln(1+x^2)dx = \frac{e^{2\propto}}{4} - e^{-\propto} + \propto ln(1+\propto^2) + 2\mathbf{I} - 5\propto + \frac{3}{4}$$

3) En déduire en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0 \ \ et \ \ x = \propto$ en fonction de **I** et $\propto$.