Exercice 1

1) Préciser le domaine de définition puis résoudre les équations suivantes :

$(E_1): \ln(2+5x)=\ln(x+6)$; $(E_2): \ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln 3$; $(E_3): \ln x = 2$; $(E_4): \dfrac{2(1+\ln x)}{5x}=0$;

$(E_5): (\ln x)^2+\ln x-6=0$; $(E_6): \ln(2x-3)=1$; $(E_7): \ln\left(\dfrac{x-1}{2x-1}\right)=0$; $(E_8): \ln\left(\left|\dfrac{x-1}{2x-1}\right|\right)=0$;

$(E_9): \ln(x-1)=\ln(2x-1)$; $(E_{10}): \ln(|x-1|)=\ln(2x-1)$; $(E_{11}): \ln(|x-1|)=\ln(|2x-1|)$;

2) Résoudre les systèmes suivants :

$S_1: \begin{cases} x+y=3 \\ \ln x+\ln y=\ln 2 \end{cases}$; $S_2: \begin{cases} x-y=\dfrac{3}{2} \\ \ln x+\ln y=0 \end{cases}$; $S_3: \begin{cases} 5\ln x+2\ln y=26 \\ 2\ln x-3\ln y=-1 \end{cases}$; $S_4: \begin{cases} \ln(xy)=4 \\ (\ln x)(\ln y)=-12 \end{cases}$

3) Préciser le domaine de définition puis résoudre les inéquations suivantes :

$(I_1): \ln(3+2x)\le\ln(x-1)$; $(I_2): \ln x\ge 2$; $(I_3): \ln(x-2)+\ln(5-x)<\ln 2$; $(I_4): \dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}>0$

$(I_5): (\ln x)^2+\ln x-6\le 0$; $(I_6): \ln(5-2x)\ge 1$; $(I_7): \left(\dfrac{4}{5}\right)^n>4, n\in\mathbb{N}$; $(I_8): (2x-1)(1-\ln x)<0$

Exercice 2

1) Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}+\ln x$; $b)\ \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}$; $d)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+2\ln x}{x+\ln x}$; $e)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{2x}$;

$f)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x+1)}{x-1}$; $g)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+3x+7)}{2x+4}$; $h)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{x^2+6}$; $i)\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^3-x+5-3\ln(2x+1)$;

2) Déterminer le domaine de définition puis calculer les limites à ses bornes, des fonctions suivantes :

$a)\ f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$; $b)\ f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$; $c)\ f(x)=\dfrac{x\ln x-1}{1+\ln x}$; $d)\ f(x)=\ln\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)$;

3) Préciser les domaines de définition et de dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$a)\ f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$; $b)\ f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$; $c)\ f(x)=\dfrac{x\ln x-1}{1+\ln x}$; $d)\ f(x)=\ln\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)$;

$e)\ f(x)=x(1+\ln x)$; $b)\ f(x)=\dfrac{1-\ln x}{2x+1}$; $c)\ f(x)=3(\ln x)^2-x+1$; $d)\ f(x)=x-\ln\left(\dfrac{x+3}{2-x}\right)$;

Exercice 3 (SN2008)

I – Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x-2\ln x$

1) a) Déterminer $g'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$

b) Montrer que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0,2]$ et est croissante sur l'intervalle $[2,+\infty[$.

2) Déduire que $g(x)>0$ pour tout x de $]0,+\infty[$ (Remarquer que $g(2)>0$)

II – On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-(\ln x)^2$

Et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et donner une interprétation graphique à ce résultat.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$ (on peut poser $t=\sqrt{x}$)

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$ et en déduire que la courbe $\left(C_f\right)$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction la droite (Δ) d'équation $y=x$.

d) Montrer que la courbe $\left(C_f\right)$ est en dessous de la droite (Δ).

3) a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ pour tout x de $]0,+\infty[$, et que la fonction f est strictement Croissante sur $]0,+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

c) Montrer que la droite (Δ) est la tangente à la courbe $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse 1.

4) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0,+\infty[$ et que $\dfrac{1}{e}<\alpha<\dfrac{1}{2}$ (On admet que $(\ln 2)^2<\dfrac{1}{2}$)

5) Construire dans le même repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ la droite (Δ) et la courbe $\left(C_f\right)$.

6) Montrer que la fonction $H : x\mapsto x\ln x - x$ est une primitive de la fonction $h : x\mapsto \ln x$ sur L'intervalle $]0,+\infty[$.

III – On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) Montrer que : $(n\in\mathbb{N}) : 1\le u_n\le 2$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente peis calculer sa limite.