Exercice 1

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

On note par (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation

2) Etudier les branches infinies de la courbe (C_g)

3) Etudier la parité de la fonction g

4) Construire la courbe (C_g)

5) Montrer que : $\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\right),\ g(x+y)=\dfrac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}$

6) a) Montrer que la fonction g est une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $]-1,1[$

b) Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in]-1,1[$

c) Déterminer $\left(g^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x\in]-1,1[$

d) Construire dans le même repère, la courbe $(C_{g^{-1}})$

Exercice 2

I – Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la fonction numérique g_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_n(x)=x+e^{-nx}$, et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Etudier les variations de la fonction g_n

b) Montrer que la fonction g_n admet une valeur minimale d'abscisse un nombre réel u_n que l'on déterminera en fonction de n.

2) a) Calculer les limites de g_n en $+\infty$ et en $-\infty$

b) Déterminer les deux branches infinies de la courbe (C_n).

3) a) Etudier la position relative des deux courbes (C_1) et (C_2)

b) Construire les courbes (C_1) et (C_2) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. (On prend $\|\vec{i}\|=2cm$ et $\ln 2\simeq 0,7$)

4) a) En utilisant une intégration par partie, calculer en fonction de x l'intégrale : $I(x)=\int_0^x t e^{-2t}\,dt$

b) Soit h_2 la restriction de g_2 sur l'intervalle $[0,\ln 2]$.

Calculer Le volume du solide donné par la rotation de la courbe de la fonction h_2 autour de l'axe abscisses

5) On pose $v_n=g_n(u_n)$.

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et calculer leurs limites

II – On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=x+e^{nx}$

1) Etudier les variations de la fonction f_n

2) En déduire que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α_n dans $\mathbb{R}$.

3) a) Montrer que $\alpha_1 \in \left]-\ln 2,-\frac{1}{2}\right[$

b) Montrer que les deux expressions $(x-\alpha_1)$ et $(e^x+\alpha_1)$ ont le même signe sur $\mathbb{R}$

4) a) Soit φ la fonction numérique définie sur l'intervalle $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$ par : $\varphi(x)=e^x-\frac{1}{\sqrt{e}}x$.

Montrer que la fonction φ est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$.

b) En déduire que : $\left(\forall x\in\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\right),\ \left|e^x+\alpha_1\right|\le\frac{1}{\sqrt{e}}\left|x-\alpha_1\right|$

5) On pose : $\beta_0=-\frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n: $\beta_{n+1}=e^{-\beta_n}$

a) Montrer qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ \left|\beta_{n+1}-\alpha_1\right|\le a\left|\beta_n-\alpha_1\right|$

b) Montrer que la suite (β_n) est convergente et calculer sa limite

Exercice 3

Partie I :

Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\ge 3$.

On considère la fonction g_n définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $g_n(x)=nx+2\ln x$.

1) Dresser le tableau de variation de la fonction g_n.

2) Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[),\ \sqrt{x}>\ln x$

3) a) Montrer que l'équation $g_n(x)=0$ admet une unique solution α_n dans l'intervalle $]0,+\infty[$ et que :

$$\frac{1}{n}<\alpha_n<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

Partie II :

A – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\sqrt[3]{x}\,e^{-x}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=3cm)$

1) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et donner une interprétation graphique au Résultat obtenu.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et donner une interprétation graphique au résultat obtenu.

3) a) Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[),\ f'(x)=\left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x)$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4) Construire la courbe (C_f). (On prend : $f\left(\frac{1}{3}\right)\simeq 0,5$)

B – On pose : $I=\left[\frac{1}{3},1\right]$

1) a) Montrer que : $f\left(I\right)=I$

b) Montrer que : $\left(\forall x\in I\right),\ \left|f'(x)\right|\leq\frac{2}{3}$

c) Montrer que : $\left[\left(f(x)=x\ et\ x>0\right)\Leftrightarrow x=\alpha_3\right]$ (où α_3 est la solution de l'équation $g_3(x)=0$)

2) Soit $\left(u_n\right)$ la suite numérique définie par : $u_0=\frac{1}{3}\ et\ \left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\ u_{n+1}=f\left(u_n\right)$

a) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\ u_n\in I$

b) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\ \left|u_{n+1}-\alpha_3\right|=\frac{2}{3}\left|u_n-\alpha_3\right|$

c) En déduire que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\ \left|u_n-\alpha_3\right|=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

d) Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente et calculer sa limite.