Exercice 1

1) Montrer que pour tout réel x, on a :

a) $\dfrac{e^{x+2}}{e^2+e^{x+2}}=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

b) $1-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

c) $\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

d) $\dfrac{e^{5x+3}e^{-1-x}}{e^{2x+2}}$

2) Développer et réduire les expressions suivantes :

a) $e^x\left(e^x+5\right)$

b) $e^{-x}\left(e^x-3\right)$

c) $\left(e^x+5\right)\left(2e^x-3\right)$

d) $\left(e^x+3\right)^2$

e) $\left(2e^x+3\right)\left(2e^x-3\right)$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1) $e^x=1$

2) $e^x=0$

3) $e^x+1=0$

4) $e^{2x}=e^{3x-1}$

5) $e^{9x^2}=e^{36}$

6) $e^{5x+7}=1$

7) $e^{3x+1}=\dfrac{e^{x+2}}{e^{2x+5}}$

8) $\left(2x-3\right)\left(3e^{x+1}-2\right)=0$

9) $2e^x-5xe^x=0$

10) $e^{2x}+3e^x-4=0$

11) $e^x+4e^{\frac{x}{2}}+3=0$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1) $e^{2x-3}\leq e^{5x^2}$

2) $e^{\frac{2}{x}+1}>3$

3) $\left(e^x-2\right)\left(e^x-1\right)\geq 0$

4) $e^{2x}-3e^x+10<0$

5) $\left(3x+2\right)\left(e^{x+1}-1\right)\leq 0$

6) $5e^{x+3}+7<0$

7) $3e^{\frac{2}{1+x}}-2e^{\frac{1}{1+x}}+1>0$

8) $e^{5x^2+3x-2}\geq 1$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-3e^x$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x+5}}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^3+x-1}}{x^2+1}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x+1}}{x^2+1}$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2x-1\right)e^{2+x}$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

7) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{3x}-\dfrac{3}{x\left(e^x+4\right)}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+\ln x}{e^x+1}$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x\left(\sqrt{2+e^{2x}}-e^{x}\right)$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{x^2}}{5x^2}$

11) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-e^{-2x}}{3+e^{-x}}$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(e^{3x}+e^{x}+1\right)}{x+2}$

Exercice 5

Etudier la continuité de la fonction f en x_0, dans chacun des cas suivants :

1) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^{x-2}-1}{x-2} \ ; x\neq 2 \\ f(2)=1 \end{cases}$; $x_0=2$

2) $\begin{cases} f(x)=1+e^{x}+e^{2x} ; \ x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{e^{3x}-1}{e^{x}-1} ; \ x<0 \end{cases}$; $x_0=0$

3) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x-4}-2} ; \ x>8 \\ f(8)=\dfrac{1}{3} \\ f(x)=\dfrac{e^{8-x}-1}{24-3x} \ ; x<8 \end{cases}$; $x_0=8$

Exercice 6 :

Etudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 et calculer $f'(x_0)$, dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=x+1+e^{x-2}$; $x_0=2$

2) $f(x)=\dfrac{e^{x}+3}{e^{x}+1}$; $x_0=0$

3) $f(x)=\sqrt{1+3e^{x-1}}$; $x_0=1$

4) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{1+\ln x} \ ; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$; $x_0=0$

5) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2\left(1+e^{2x}\right)}{1-e^{x}} \ ; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$; $x_0=0$

6) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1} \ ; x>0 \\ f(0)=0 \\ f(x)=\dfrac{x}{1+e^{-x}} \ ; x<0 \end{cases}$; $x_0=0$

Exercice 7

Déterminer l'ensemble de définition D_f, l'ensemble de dérivabilité $D_{f'}$ de la fonction f puis déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout $x\in D_{f'}$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=e^{x}+e^{-x}$

2) $f(x)=xe^{-x}+2x+3$

3) $f(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{x}-1}$

4) $f(x)=e^{x\sqrt{x}}-e^{-x}+2$

5) $f(x)=x^2e^{-x}$

6) $f(x)=(5x+2)e^{-\frac{x}{5}}$

7) $f(x)=e^{\cos(3x-2)}$

8) $f(x)=\dfrac{2e^{-x}}{x+2}$

9) $f(x)=e^{\sqrt{2x^2+x+6}}$ 10) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}e^{-2x+1}$	11) $f(x)=e^x\ln x$ 12) $f(x)=2^x+\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$	13) $f(x)=\ln\left(e^{-2x}+e^x+2\right)$ 14) $f(x)=\dfrac{e^{x^2}+x+1}{e^{-x}+1}$

Exercice 8

On considère la fonction h définie sur $[0,1]$ par : $h(x)=1-x^2e^{1-x^2}$

1) a) Montrer que la fonction h est dérivable sur $[0,1]$ et que $h'(x)=2x\left(x^2-1\right)e^{1-x^2}$

b) Dresser le tableau de variations de la fonction h

c) Déduire que h est une bijection de $[0,1]$ vers un intervalle à préciser

2) Soit n un entier naturel tel que $n\geq 2$

a) Montrer que l'équation $h(x)=\dfrac{1}{n}$ admet une solution unique u_n dans $]0,1[$

b) Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ puis déduire qu'elle est convergente

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 9

Partie I :

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^x+x+1$

1) a) Etudier les variations de la fonction g

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $-2<\alpha<-1$

2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

Partie II :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{xe^x}{1+e^x}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C) et la droite (Δ)

d) Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) sur $\mathbb{R}$

3) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{\left(1+e^x\right)^2}$

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f

4) a) Calculer $f'(\alpha)$ et interpréter ce résultat graphiquement

b) Montrer que $f(\alpha)=1+\alpha$

5) a) Déterminer l'équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point D'abscisse 0

6) Construire la courbe (C) et les droites (Δ) et (T) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

Partie III :

Soit n un entier naturel.

1) a) Montrer que l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution v_n dans $\mathbb{R}$

b) Etudier les variations de la suite (v_n) ainsi construite

c) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ v_n\geq n$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

2) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*),\ v_n-n=ne^{-v_n}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-n)$

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(v_n)-n=-\infty$