Exercice1

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1=\frac{2-3i}{1+2i}\ ;\ z_2=\frac{1-\left(1+\sqrt{2}\right)i}{1+\left(1+\sqrt{2}\right)i}\ ;\ z_3=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8\ ;\ z_4=\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$$

$$z_5=(3+2i)(1-5i)\ ;\ z_6=\left(\sqrt{3}-2+i\right)^2\ ;\ z_7=\frac{1+\sqrt{3}-i}{1-\sqrt{3}+i}$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(3-i)z+4-2i=0$; 2. $3iz+2-3i=(1+i)z-2$; 3. $(1+i)\overline{z}+(2-i)z+2-3i=0$

4. $2i\,\overline{z}+(1+i)z+3-i=0$; 5. $|z|+z-3-4i=0$; 6. $z^2-\overline{z}=0$

7. $4z^2+8|z|^2-3=0$; 8. $z+3\overline{z}=(2+3i)z$

Exercice 3

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$, dans chacun des cas suivants :

1. $(z-i)(\overline{z}-1)\in\mathbb{R}$; 2. $\dfrac{z+1}{z-2i}\in\mathbb{R}$; 3. $\dfrac{z+1}{z-2i}\in i\mathbb{R}$; 4. $\dfrac{1+z}{z+i}\in i\mathbb{R}$

4. $|z-2+3i|=|z+1-2i|$; 5. $|z+5-2i|=|\overline{z}-3+2i|$; 6. $|z-2+3i|=2$; 7. $|2\overline{z}-6+4i|=4$

8. $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z+1}{z-2}\right)=1$

Exercice 4

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1=-4+3i;\quad z_2=(2-2i)^3;\quad z_3=\left(\sqrt{5}-1\right)-\left(\sqrt{5}+1\right)i;\quad z_4=(2+3i)(1-2i)^2$$

$$z_5=\frac{\left(2-i\sqrt{3}\right)^3}{1-i\sqrt{6}};\quad z_6=1+\cos\theta+i\sin\theta\ \text{où}\ \theta\in\left]0,\pi\right[;\quad z_7=1-\cos\alpha-i\sin\alpha\ \text{où}\ \alpha\left]0,\pi\right[$$

Exercice 5

1) Montrer géométriquement que, pour tout nombre complexe $z\neq i$, on a ;

$$z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left|\frac{z+i}{z-i}\right|=1$$

2) Soit $u\in\mathbb{C}$ tel que $u\neq1$.

Montrer que, pour tout nombre complexe z, on a :

$$\frac{z-u\,\overline{z}}{1-u}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(z\in\mathbb{R}\ \text{ou}\ |u|=1\right)$$

Exercice 6

Donner les écritures trigonométrique et exponentielle de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = 3 + i\sqrt{3}$; $z_2 = 5 - 5i$; $z_3 = 5$; $z_4 = -7$; $z_5 = 12i$; $z_6 = -i\sqrt{2}$

$z_7 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)(2 - 2i)$; $z_8 = \dfrac{5i}{2\sqrt{3} - 2i}$; $z_9 = \left(3 - i\sqrt{3}\right)^4$; $z_{10} = (\cos\theta + i\sin\theta)^5$

$z_{11} = \dfrac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}$ où $\theta \in]0, \pi[$; $z_{12} = \sin\dfrac{\pi}{7} - i\cos\dfrac{\pi}{7}$; $z_{13} = 1 - i\tan\dfrac{7\pi}{5}$

Exercice 7

1) Soit $(u, v) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U}$ tel que $uv \neq -1$. Montrer que $\dfrac{u + v}{1 + uv} \in \mathbb{R}$

2) Soit $z \in \mathbb{U}$ tel que $z \neq 1$. Montrer que $\dfrac{z + 1}{z - 1} \in i\mathbb{R}$

Exercice 8

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$(E) : 2z^2 - (1 + 5i)z - 2(1 - i) = 0$; $(F) : iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$

$(G) : z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$

2) Déterminer les nombres complexes z et z' vérifiant $\begin{cases} z + z' = 3i \\ z \times z' = -1 - 3i \end{cases}$

Exercice 9

1) Déterminer en fonction de α, le module et un argument de chacun des deux

nombres complexes $z = 1 + e^{i\alpha}$ et $z' = 1 - e^{i\alpha}$ où $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

2) En déduire la forme trigonométrique des deux nombres complexes

$z_1 = 2 - \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$ et $z_2 = 2 + \left(\sqrt{3} - i\right)$

Exercice 10

1) Soit u un nombre complexe tel que $u \neq 0$ et $u \neq 1$ et $|u - 1| = |u|$.

Montrer que : $\arg(u) + \arg(u - 1) \equiv \pi [2\pi]$

2) Déterminer les nombres complexes z tel que : $\begin{cases} |z| = |z - 4| \\ \arg(z) \equiv \arg(z + 1 + i) [2\pi] \end{cases}$