1 – Puissances de 10

Définition

Soit n un entier naturel non nul. On note $\underbrace{10\times10\times10\times\ldots\times10}_{n \text{ fois } 10}=10^n$ et $10^0=1$

Exemples

On a :

- $10^0=1$
- $10^1=10$
- $10^2=100$
- $10^3=1000$
- $10^4=10000$
- $10^{-1}=0,1$
- $10^{-2}=0,01$
- $10^{-3}=0,001$
- $10^{-4}=0,0001$

2 – Exemples et définition

Théorème et définition

Pour tout réel y strictement positif, il existe un unique réel x tel que $y=10^x$.

Le nombre réel x s'appelle le logarithme décimal de y, et se note $\log(y)=x$ ou $\log_{10}(y)=x$

Et on a : $\log(10^x)=x$ ou $\log_{10}(10^x)=x$

Exemples

- $\log(1)=\log(10^0)=0$
- $\log(10)=\log(10^1)=1$
- $\log(100)=\log(10^2)=2$
- $\log(1000)=\log(10^3)=3$
- $\log(0,1)=\log(10^{-1})=-1$
- $\log(0,01)=\log(10^{-2})=-2$
- $\log(0,001)=\log(10^{-3})=-3$

Proposition

Soit x et y deux réels. Alors : $y=\log(x)\Leftrightarrow x=10^y$

Remarque

Pour calculer $\log(x)$, on doit avoir $x>0$

3 – Propriétés

Proposition 1

Soient a et b deux réels strictement positifs et n un entier naturel. Alors :

- $\log(a\times b)=\log(a)+\log(b)$
- $\log(a^n)=n\times\log(a)$
- $\log(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\log(a)$

Exemple

Calculer : $A=\log\left(\sqrt{11}-1\right)+\log\left(\sqrt{11}+1\right)$ et $B=2\log(5)+2\log(2)$

<u>Réponse</u>

- On a $A=\log\left(\sqrt{11}-1\right)+\log\left(\sqrt{11}+1\right)=\log\left[\left(\sqrt{11}-1\right)\left(\sqrt{11}+1\right)\right]=\log\left[\left(\sqrt{11}\right)^2-1^2\right]$
  $=\log(11-1)=\log(10)=1$
- On a : $B=2\log(5)+2\log(2)=\log\left(5^2\right)+\log\left(2^2\right)=\log(25)+\log(4)=\log(25\times 4)$
  $=\log(100)=2$

Proposition 2

Soient a et b deux réels strictement positifs et n un entier naturel. Alors :

★ $\log\left(\dfrac{1}{b}\right)=-\log(b)$

★ $\log\left(\dfrac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$

★ $\log\left(\dfrac{1}{b^n}\right)=-n\times\log(b)$

<u>Exemple</u>

Calculer : $A=\log\left(\dfrac{1}{5}\right)+\log\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $B=\log\left(\dfrac{101}{23}\right)$ *et* $C=\log\left(\dfrac{1}{5^{10}}\right)$.

<u>Réponse</u>

- $A=\log\left(\dfrac{1}{5}\right)+\log\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\log(5)-\log(2)=1\left[\log(5)+\log(2)\right]=-\log(5\times 2)$
  $=-\log(10)=-1$
- $B=\log\left(\dfrac{101}{23}\right)=\log(101)-\log(23)$
- $C=\log\left(\dfrac{1}{5^{10}}\right)=-10\times\log(5)$

Proposition 3

Soient a et b deux réels strictement positifs. Alors :

★ $\log(a)=\log(b) \Leftrightarrow a=b$

★ $\log(a)<\log(b) \Leftrightarrow a<b$

★ $\log(a)>\log(b) \Leftrightarrow a>b$

<u>Exemples</u>

1) Résoudre les équations suivantes : $\log\left(\dfrac{x}{5}\right)=\log(2)$; $\log(2x+3)=2\log(5)$

2) Résoudre les inéquations suivantes : $\log(3x)<\log(7)$; $\log(3-x)>\log\left(\dfrac{3}{5}\right)$

<u>Réponses</u>

1) +) $\log\left(\frac{x}{5}\right)=\log(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{5}=2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=10$ donc $S=\{10\}$.

+) $\log(2x+3)=2\log(5) \Leftrightarrow \log(2x+3)=\log\left(5^2\right) \Leftrightarrow \log(2x+3)=\log(25)$

$\Leftrightarrow 2x+3=25 \Leftrightarrow 2x=25-3 \Leftrightarrow 2x=22 \Leftrightarrow x=11$

Donc : $S=\{11\}$

2) +) $\log(3x)<\log(7) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x<7 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\frac{7}{3} \\ x>0 \end{cases}$

Donc : $S=\left]0,\frac{7}{3}\right[$

+) $\log(3-x)>\log\left(\frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x>\frac{3}{5} \\ 3-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3-\frac{3}{5} \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\frac{12}{5} \\ x<3 \end{cases}$

Donc : $\left]-\infty,\frac{12}{5}\right[$