1 – Les rapports trigonométriques d'un angle aigu

Définitions

Dans un triangle ABC rectangle en A

- ★ Le cosinus d'un angle aigu est égal au quotient du côté adjacent sur l'hypoténuse

  Autrement dit : $\cos\left(\hat{B}\right) = \cos\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \dfrac{AB}{BC}$

- ★ Le sinus d'un angle aigu est égal au quotient du côté opposé sur l'hypoténuse

  Autrement dit : $\sin\left(\hat{B}\right) = \sin\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \dfrac{AC}{BC}$

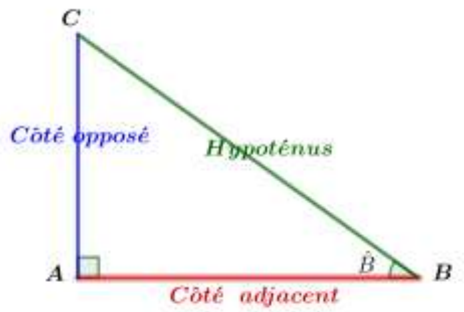
- ★ La tangente d'un angle aigu est égal au quotient du côté opposé sur le côté adjacent

  Autrement dit : $\tan\left(\hat{B}\right) = \tan\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{AC}{AB}$

Remarques

Dans un triangle ABC rectangle en A, on a :

- ♦ Le côté adjacent à l'angle $\left(\widehat{ABC}\right)$ est
  Le côté $[AB]$
- ♦ Le côté opposé à l'angle $\left(\widehat{ABC}\right)$ est
  Le côté $[AC]$
- ♦ L'hypoténuse du triangle ABC rectangle en A
  Est le côté $[BC]$



Propriétés

- ❖ **Le cosinus et le sinus** d'un angle aigu est **compris entre 0 et 1**
- ❖ **La tangente** d'un angle aigu est **un réel positif**

Exemples

1) Soit EFG un triangle rectangle en E tel que $EF = 3\,\text{cm}$ et $EG = 4\,\text{cm}$

   a) Calculer la longueur FG

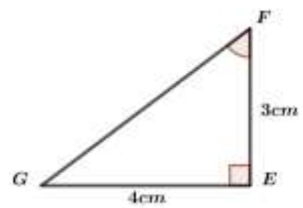
   b) Calculer $\cos\left(\widehat{EFG}\right)$, $\sin\left(\widehat{EFG}\right)$ et $\tan\left(\widehat{EFG}\right)$

2) Soit IJK un triangle rectangle en I tel que $IJ = 5\text{cm}$ et $\cos\left(\widehat{IJK}\right) = 0,8$

   a) Calculer la longueur JK

   b) Calculer la longueur IK

Réponses



1) a) Le triangle EFG est rectangle en E, donc d'après

Le théorème de Pythagore on a : $FG^2 = EF^2 + EG^2 = 3^2 + 4^2 = 25$

D'où $FG = \sqrt{25} = 5$. Alors $FG = 5\ cm$

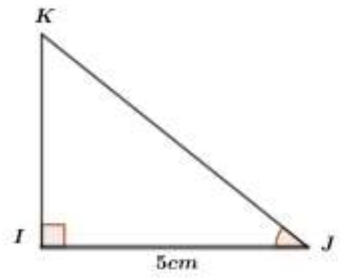
b)Le triangle EFG est rectangle en E donc

$\cos\left(\widehat{EFG}\right) = \dfrac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \dfrac{EF}{FG} = \dfrac{3}{5} = 0,6$. Alors $\cos\left(\widehat{EFG}\right) = 0,6$

$\sin\left(\widehat{EFG}\right) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \dfrac{EG}{FG} = \dfrac{4}{5} = 0,8$. Alors $\sin\left(\widehat{EFG}\right) = 0,8$

$\tan\left(\mathrm{EFG}\right)=\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}=\dfrac{\mathrm{EG}}{\mathrm{EF}}=\dfrac{4}{3}$. Alors $\tan\left(\mathrm{EFG}\right)=\dfrac{4}{3}$

2) a) Le triangle IJK est rectangle en I. Alors



$\cos\left(\mathrm{IJK}\right)=\dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}=\dfrac{\mathrm{IJ}}{\mathrm{JK}}=\dfrac{5}{\mathrm{JK}}=0{,}8$

Donc $\mathrm{JK}=\dfrac{5}{0{,}8}=6.25$. D'où $\mathrm{JK}=6.25\ cm$

b) Le triangle IJK est rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore on a : $\mathrm{JK}^2=\mathrm{IJ}^2+\mathrm{IK}^2$ alors

$\mathrm{IK}^2=\mathrm{JK}^2-\mathrm{IJ}^2=(6{,}25)^2-5^2=14{,}0625$

Donc $\mathrm{IK}=\sqrt{14{,}0625}=3{,}75$. D'où $\mathrm{IK}=3{,}75\ cm$

2 – Formules trigonométriques

Proposition 1

Soit la mesure d'un angle aigu. Alors :

- ★ $(\cos(a))^2+(\sin(a))^2=1$
- ★ $\tan(a)=\dfrac{\sin(a)}{\cos(a)}$

Remarques

- ♦ On a aussi : $(\cos(a))^2=1-(\sin(a))^2$ *et* $(\sin(a))^2=1-(\cos(a))^2$
- ♦ On a aussi : $\sin(a)=\tan(a)\times\cos(a)$ *et* $\cos(a)=\dfrac{\sin(a)}{\tan(a)}$

Exemple

Soit x la mesure d'un angle aigu tel que $\cos x=0{,}4$. Calculer $\sin x$ et $\tan x$

Réponse

On a $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$ donc $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-(0{,}4)^2=0{,}84$

Or x est la mesure d'un angle aigu donc $\sin x\geq 0$. Alors $\sin x=\sqrt{0{,}84}=2\sqrt{0{,}21}$

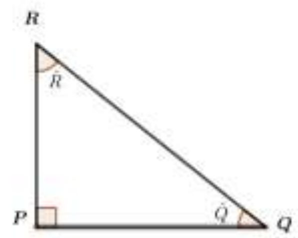
Et on a $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{2\sqrt{0{,}21}}{0{,}4}=5\sqrt{0{,}21}$

Définition

Deux angles aigus sont dits **complémentaires** si et seulement si **la somme de leurs mesures est égale à 90°**

Remarque

- ♦ Dans un triangle rectangle les deux angles, autres que l'angle droit, sont complémentaires
- ♦ Dans la figure ci-contre les angles $\hat{\mathrm{R}}$ et $\hat{\mathrm{Q}}$ sont complémentaires



Proposition 2

Soient a et b les mesures de deux angles complémentaires. Alors :

- ★ $\cos a = \sin b$
- ★ $\sin a = \cos b$
- ★ $\tan a = \dfrac{1}{\tan b}$

Exemple

Soit x la mesure de l'angle complémentaire d'un angle de mesure 40°. Calculer $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$.

Réponse

Puisque x et 40° sont les mesures de deux angles complémentaires, alors :

$\cos x = \sin 40°$, $\sin x = \cos 40°$ et $\tan x = \dfrac{1}{\tan 40°}$