I – Fonction logarithme népérien

1 – Définition

Définition

La fonction **logarithme népérien** est la primitive de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1, on la note **ln** ou **Log**

Conséquences immédiates

- La fonction **ln** est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$
- $\ln(1)=0$
- $(\forall x \in]0,+\infty[),\ (\ln x)' = \frac{1}{x}$

2 – Propriétés

Propriété1

- La fonction **ln** est strictement croissante sur $]0,+\infty[$
- $\forall (a,b) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[;\ \ln a = \ln b \Leftrightarrow a=b$
- $\forall (a,b) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[;\ \ln a < \ln b \Leftrightarrow a<b$

Propriété2

$\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[,\ \forall r \in \mathbb{Q}$ on a :

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\ln\left(x^r\right) = r\ln x$
- $\ln x = r \Leftrightarrow x = e^r$
- $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln x$

Propriété 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$
$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$	$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$	$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

3 – Etude de la fonction ln

Tableau de variation de ln

x	0	$+\infty$
$(\ln x)'$	‖	$+$
$\ln x$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

Tableau de signe de ln

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

4 – Le nombre e :

Proposition

L'équation $\ln x = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0,+\infty[$, on la note e et on a $e \simeq 2,71828182845904...$

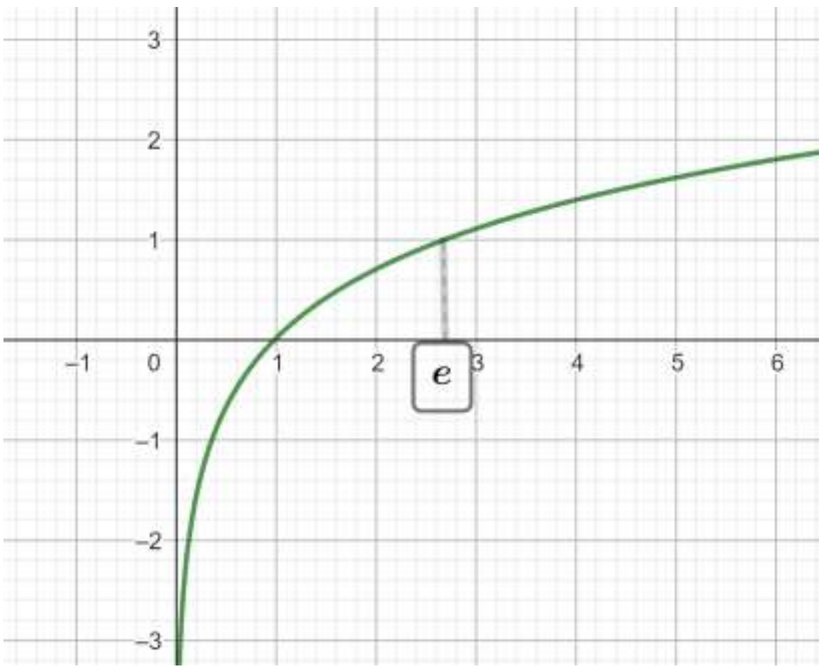
Remarque : $\ln(e) = 1$

5 – Courbe de la fonction ln

On a : $\ln(1) = 0,\ \ln(e) = 1$ donc la courbe représentative de ln passe par les deux points

De coordonnées $(1,0)$ *et* $(e,1)$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, alors la courbe de ln admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$. Et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, alors la courbe de ln admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$



6 – Dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$

Théorème :

Soit u définie sur D_u et dérivable sur $D_{u'}$. Alors la fonction $f : x \mapsto \ln(u(x))$ est définie sur $D_f = D_u \cap \{x \in D_u \,/\, u(x) > 0\}$ et est dérivable sur $D_{f'} = D_{u'} \cap \{x \in D_u \,/\, u(x) > 0\}$ et on a :

$$\left[\ln(u(x))\right]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

II – Fonction logarithme de base *a*

Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$

Définition

La fonction logarithme de base a est la fonction notée $\log_a$ et définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Remarque : Si $a = 10$ la fonction logarithme de base 10, notée $\log_{10}$ est aussi appelée « logarithme décimal »

Propriétés

$\forall x \in]0,+\infty[, \forall y \in]0,+\infty[$ *et* $\forall r \in \mathbb{Q}$, on a les propriétés suivantes :

- $\log_a(1) = 0 ; \log_a(a) = 1$
- $\log_a(x\,y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a x$
- $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x^r) = r \log_a x$
- $\log_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$

Théorème

La fonction $\log_a$ est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ (\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$$

Théorème

- Si $0 < a < 1$, alors la fonction $\log_a$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$
- Si $a > 1$, alors la fonction $\log_a$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

Courbes (C_2) et $\left(C_{\frac{1}{2}}\right)$ représentatives des fonctions $\ln_2$ et $\ln_{\frac{1}{2}}$ dans un repère

Orthonormé :