I - Dérivabilité d'une fonction

1. Dérivabilité d'une fonction en un point

1.1. Définition

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in \mathrm{I}$.

Dire que la fonction f est dérivable en a signifie qu'il existe un réel L tel que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$

ou $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$ .Ce nombre L est appelé « le nombre dérivé de f en a »et est noté $f'(a)$

Remarque

f est dérivable en $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ $(où\ f'(a) \in \mathbb{R})$

Exemple

la fonction sinus est dérivable en 0 car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et on a $\sin'(0) = 1$

La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$

1.2. Interprétation graphique du nombre dérivé

Définition :

Soit f une fonction dérivable en un réel a, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère.

La droite T d'équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ est la tangente à (C_f) au point $A(a; f(a))$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ $par : f(x) = \frac{3x+1}{x+2}$.

a/ Montrer que f est dérivable en $x_0 = 0$ et calculer $f'(0)$

b/ Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 0$

1.3. Approximation d'une fonction continue en un point par une fonction affine au voisinage de a

Définition :

Soit f une fonction dérivable en a.

La fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ est une approximation affine de fonction f au voisinage de a et on peut noter : Si h est voisin de 0; $f(a+h) \simeq h \times f'(a) + f(a)$

Exemple

Déterminer une approximation affine de $\sqrt{9,04}$

Posons $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 9$ et $h = 0,04$ .On montre facilement que $f'(9) = \frac{1}{6}$; comme

$f(a+h) \simeq f(a) + h \times f'(a)$ alors $f(9,04) = f(9+0,04) \simeq f(9) + 0,04 \times f'(9)$. D'où $\sqrt{9,04} \simeq 3,067$

1.4. Ecriture différentielle

Soit f une fonction dérivable en un réel x. Alors pour tout réel h tel que $x+h\in D_f$ on a :
$f(x+h)-f(x)=h\times f'(x)+h\times\varphi(h)$ où φ est une fonction telle que $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$ .En posant
$\Delta y=f(x+h)-f(x)$ et $\Delta x=h$;on a : $\Delta y=f'(x)\times\Delta x+\varphi(\Delta x)\times\Delta x$, en plus si Δx est infiniment petit
cette écriture devient : $dy=f'(x)\times dx$ ou $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$ qui s'appelle l'écriture différentielle de $f'(x)$.

1.5. Relation entre continuité et dérivabilité

Propriété

Toute fonction dérivable en un réel a, est continue en a

Remarques

1/ La réciproque de cette propriété n'est pas vraie en général.

Ex effet si $f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$ alors f est continue en $x_0=0$ mais elle n'est pas dérivable en $x_0=0$.

2/ Si une fonction n'est pas continue en un réel a alors elle n'est pas dérivable en a.

2. Dérivabilité à droite – Dérivabilité à gauche en un point

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I=[a,a+\alpha[$ où $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$.
Dire que la fonction f est dérivable à droite en a signifie qu'il existe un réel L tel que ;

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=L$$

Le nombre L est appelé « le nombre dérivé de f à droite en a » et est noté $f_d'(a)$

Définition 2

Soit f une fonction dérivable à droite en a et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

La demi-droite T_d d'équation $\begin{cases}y=f_d'(a)(x-a)+f(a)\\ x\geq a\end{cases}$ est appelée la demi – tangente à la courbe (C_f) à droite du point d'abscisse a

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a-\alpha;a[$ où $a\in\mathbb{R}$ et $\alpha>0$.
Dire que la fonction f est dérivable à gauche en a signifie qu'il existe un nombre réel L' tel que

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=L'.$$

Le nombre réel L' est appelé « le nombre dérivé de f à gauche en a » et est noté par $f_g'(a)$

Définition 4

Soit f une fonction dérivable à gauche en a $(a\in\mathbb{R})$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

La demi-droite d'équation $\begin{cases} y = f'(a)(x-a)+f(a) \\ x \le a \end{cases}$ est une demi-tangente à la courbe (C_f) à gauche du point d'abscisse a.

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

$$f \text{ dérivable en } a \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable à droite en } a \\ f \text{ dérivable à gauche en } a \\ f_d'(a) = f_g'(a) \end{cases}$$

Exemples

Etudier la dérivabilité en a des fonctions suivantes et interpréter le résultat graphiquement.

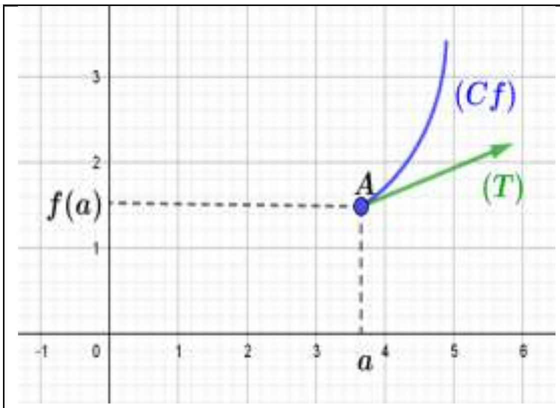
1/ $f(x) = Arc\tan x$; $a=0$. 2/ $f(x) = |x-2|$; $a=2$ .3/ $f(x) = \sqrt{2+x}\cos(\pi x)$; $a=-1$.

4/ $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right); x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$; $a=0$. 5/ $\begin{cases} f(x) = Arc\tan x; x<0 \\ f(x) = x\sqrt[3]{x+1} \ ; x \ge 0 \end{cases}$; $a=0$.

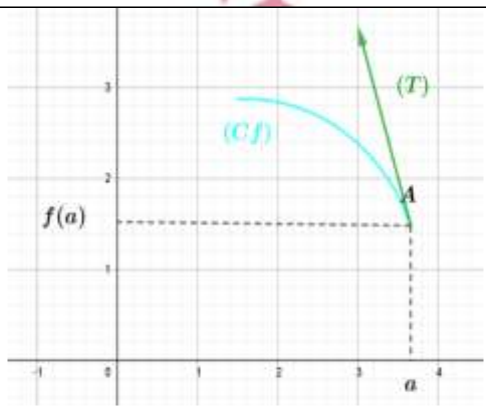
6/ $\begin{cases} f(x) = -x+\sqrt{x^2+1}; x \ge 0 \\ f(x) = \dfrac{4}{\pi} Arc\tan\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right); x<0 \end{cases}$.

Interprétation graphique des nombres dérivés :

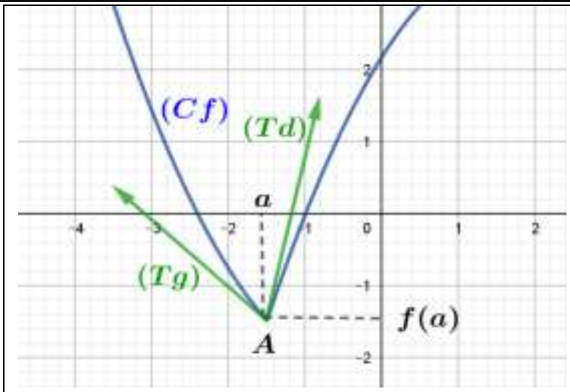
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.



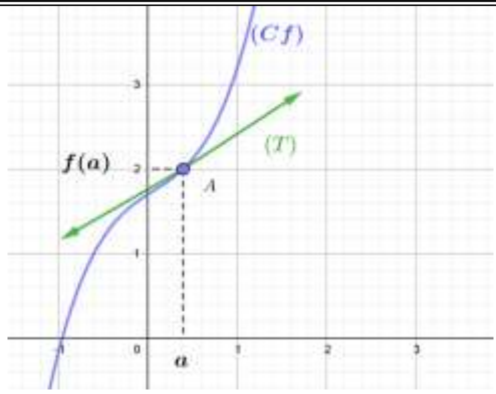
Si $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_d(a)$, (C_f) admet une demi - tangente (T) à droite du point $A(a; f(a))$ d'équation :
$\begin{cases} y = f'_d(a)(x-a)+f(a) \\ x \ge a \end{cases}$



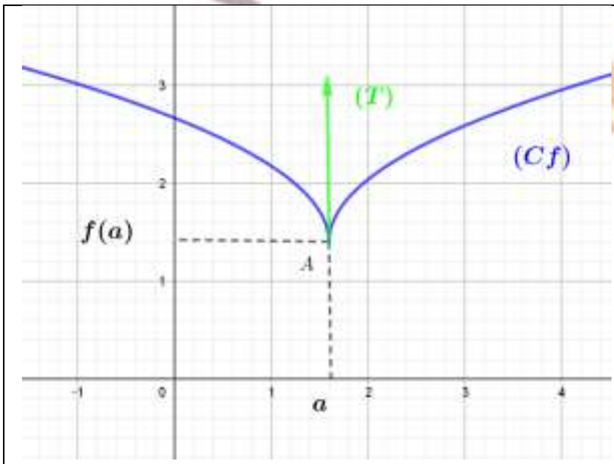
Si $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_g(a)$, (C_f) admet une demi - tangente à gauche du point $A(a; f(a))$ d'équation :
$\begin{cases} y = f'_g(a)(x-a)+f(a) \\ x \le a \end{cases}$



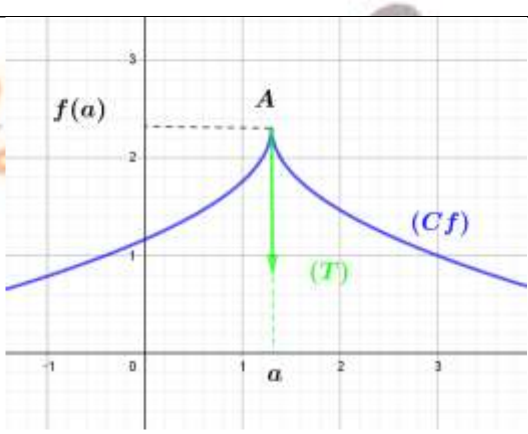
Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_d(a) \\ \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_g(a) \\ f'_d(a) \neq f'_g(a) \end{cases}$, alors la courbe (C_f) admet deux demi - tangentes au point $A(a;f(a))$. On dit que le point $A(a;f(a))$ est un point angulеux



Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_d(a) \\ \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_g(a) \\ f'_d(a) = f'_g(a) \end{cases}$, alors la courbe (C_f) admet une tangente (T) au point $A(a;f(a))$ d'équation : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$



Si $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$, alors la courbe (C_f) admet une demi – tangente verticale orientée vers le haut à droite du point $A(a;f(a))$ ou à gauche du point $A(a;f(a))$



Si $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$, Alors la courbe (C_f) admet une demi – tangente verticale orientée vers le bas à droite du point $A(a;f(a))$ ou à gauche du point $A(a;f(a))$

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x+2-\sqrt{x^2+2x} \ ; x < -2 \\ f(x) = Arc\tan\left(\sqrt{x+2}\right) \ ; x \geq 0 \end{cases}$$

1/ Etablir que f est continue en $x_0 = -2$

2/ a/ Etudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = -2$ et interpréter ce résultat graphiquement b/ Montrer que : $\lim_{x\to -2^+} \frac{f(x)}{x+2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{tan^2(t)}$ puis en déduire la dérivabilité de f à droite en $x_0 = -2$ et interpréter ce résultat graphiquement

3. Dérivabilitéd'une fonction sur un intervalle

Définition

* f dérivable sur $]a;b[\Leftrightarrow f$ dérivable en tout élément de $]a;b[$
* f dérivable sur $]a;+\infty[\Leftrightarrow f$ dérivable en tout élément de $]a;+\infty[$
* f dérivable sur $]-\infty;b[\Leftrightarrow f$ dérivable en tout élément de $]-\infty;b[$
* f dérivable sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow f$ dérivable en tout élément de $\mathbb{R}$
* f dérivable sur $[a;b[\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable sur }]a;b[\\ f \text{ dérivable à droite en } a \end{cases}$
* f dérivable sur $[a;+\infty[\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable sur }]a;+\infty[\\ f \text{ dérivable à droite en } a \end{cases}$
* f dérivable sur $]a;b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable sur }]a;b[\\ f \text{ dérivable à gauche en } b \end{cases}$
* f dérivable sur $]-\infty;b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable sur }]-\infty;b[\\ f \text{ dérivable à gauche en } b \end{cases}$
* f dérivable sur $[a;b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable sur }]a;b[\\ f \text{ dérivable à droite en } a \\ f \text{ dérivable à gauche en } b \end{cases}$

Théorème : (Dérivabilité des fonctions usuelles)

- Toute fonction polynôme est dérivable sur chaque intervalle de $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle de son domaine de définition
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur chaque intervalle de $]0;+\infty[$
- Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur chaque intervalle de $\mathbb{R}$

Théorème : (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et a et b deux réels quelconques.

- $\left.\begin{array}{l} f \text{ dérivable sur } I \\ g \text{ dérivable sur } I \end{array}\right\}$ alors $\begin{cases} f+g \text{ dérivable sur } I \\ f\times g \text{ dérivable sur } I \\ af+bg \text{ dérivable sur } I \end{cases}$

- $\left.\begin{array}{l} f \text{ dérivable sur } I \\ g \text{ dérivable sur } I \\ (\forall x \in I); g(x) \neq 0 \end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{g} \text{ dérivable sur } I \\ \frac{f}{g} \text{ dérivable sur } I \end{array}\right.$

Propriétés : (Domaine de définition et domaine de dérivabilité)

Soit f et g deux fonctions usuelles définies et dérivables respectivement sur $D_f, D_{f'}$ et $D_g, D_{g'}$, et soit a et b deux réels.

h	D_h	$D_{h'}$
$a \times f + b \times g$	$D_f \cap D_g$	$D_{f'} \cap D_{g'}$
$\frac{f}{g}$	$D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} / g(x) \neq 0\}$	$D_{f'} \cap D_{g'} \cap \{x \in \mathbb{R} / g(x) \neq 0\}$
$\sqrt{f}$	$D_f \cap \{x \in \mathbb{R} / f(x) \geq 0\}$	$D_{f'} \cap \{x \in \mathbb{R} / f(x) > 0\}$

Exemples

Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x} - 1}$; $g(x) = |x| + \tan x$; $h(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 6}$

4. Fonction dérivée

4.1. Dérivée d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

La fonction $x \mapsto f'(x)$ définie sur I , est appelée la fonction dérivée de la fonction f et est notée f'

4.2. Calcul des dérivées

Dérivées des fonctions élémentaires

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
k (constante)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n > 1)$	$\mathbb{R}$	$n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

4.3. Opérations sur les dérivées

Règles de dérivation 1

Soit u et v deux fonctions définies respectivement sur D_u et D_v et dérivables respectivement sur $D_{u'}$ et $D_{v'}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

f	D_f	f'	$D_{f'}$
$u + v$	$D_u \cap D_v$	$u' + v'$	$D_{u'} \cap D_{v'}$

λu	D_u	$\lambda u'$	$D_{u'}$
$u\times v$	$D_u\cap D_v$	$u'\times v+u\times v'$	$D_{u'}\cap D_{v'}$
$\frac{1}{v}$	$D_v\setminus\{x\in\mathbb{R}/v(x)=0\}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$D_{v'}\setminus\{x\in\mathbb{R}/v(x)=0\}$
$\frac{u}{v}$	$D_u\cap D_v\setminus\{x\in\mathbb{R}/v(x)=0\}$	$\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$	$D_{u'}\cap D_{v'}\setminus\{x\in\mathbb{R}/v(x)=0\}$

Exemples :

Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées :

$f(x)=3x^4-2x^3+5x-10$; $g(x)=\frac{2x^2+7x-1}{3x+5}$

$h(x)=\tan x-2\cos x+3x-2$; $i(x)=\frac{1-\sin x}{3+2\cos x}$

$j(x)=2x\sqrt{x}-3$; $k(x)=\frac{5}{2+3\sqrt{x}}$;

$l(x)=\cos(x)\sin(x)$; $m(x)=|x|+\cos x-2$;

$o(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+2\sin x}$; $n(x)=3x^2\cos x-5x+7$;

$p(x)=\frac{1-3x}{2-\sqrt{x}}$; $q(x)=\frac{x+2|x|}{3-|x|}$

5. Dérivée de la composée de deux fonctions

Théorème 1

Soit f et g deux fonctions et a un réel tels que $a\in D_f$ et $f(a)\in D_g$

$$\left.\begin{array}{l}* \ f \text{ dérivable en } a\\ * \ g \text{ dérivable en } f(a)\end{array}\right\}\text{ alors }\left\{\begin{array}{l}\bullet\ g\circ f \text{ dérivable en } a\\ \bullet\ (g\circ f)'(a)=g'[f(a)]\times f'(a)\end{array}\right.$$

Théorème 2

Soit f et g deux fonctions et I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I\subset D_f$ et $J\subset D_g$.

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ dérivable sur } I\\ \bullet\ g \text{ dérivable sur } J\\ \bullet\ f(I)\subset J\end{array}\right\}\text{ alors }\left\{\begin{array}{l}*\ g\circ f \text{ dérivable sur } I\\ *\ (\forall x\in I);(g\circ f)'(x)=g'[f(x)]\times f'(x)\end{array}\right.$$

Corollaire 1

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et soit f et g les fonctions définies sur I par :

$f(x)=(u(x))^n$ et $g(x)=\frac{1}{(u(x))^n}$ où $n\in\mathbb{N}^*$.

a/ Si $\left.\begin{array}{l}\bullet\ u \text{ dérivable sur } I\\ \bullet\ (\forall x\in I);u(x)\neq 0\end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ dérivable sur } I\\ \bullet\ (\forall x\in I);f'(x)=n\times(u(x))^{n-1}\times u'(x)\end{array}\right.$

b/ Si $\left.\begin{array}{l}*\ u \text{ dérivable sur } I\\ *\ (\forall x\in I);u(x)\neq 0\end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{l}*\ g \text{ dérivable sur } I\\ *\ (\forall x\in I);g'(x)=-\frac{n\times u'(x)}{(u(x))^{n+1}}\end{array}\right.$

Corollaire 2

Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que : $(\forall x\in I);u(x)\geq 0$ et soit f la fonction définie sur I par : $(\forall x\in I);f(x)=\sqrt{u(x)}$

Si $\left.\begin{array}{l}\bullet\ u \text{ dérivable sur } I\\ \bullet\ (\forall x\in I);u(x)>0\end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ dérivable sur } I\\ \bullet\ (\forall x\in I);\ f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}\end{array}\right.$

Corollaire 3

Soit a et b deux réels tels que $a\neq 0$. Les deux fonctions $x\mapsto cos(ax+b)$ et $x\mapsto sin(ax+b)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$(\forall x\in\mathbb{R});\left\{\begin{array}{l}\bullet\ [\cos(ax+b)]'=-a\times\sin(ax+b)\\ \bullet\ [\sin(ax+b)]'=a\times\cos(ax+b)\end{array}\right.$$

Exercice

Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes puis déterminer leurs fonctions dérivées :

$f(x)=\sqrt{2x+3}$; $g(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$

$i(x)=(2x+5)^4$; $j(x)=\dfrac{6}{(3x-2)^3}$; $h(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x-3}}$

$k(x)=3\,sin(\pi x)-2\,cos(\pi x)$

Règles de dérivation 2

Soit u et v deux fonctions définies respectivement sur D_u et D_v et dérivables respectivement sur $D_{u'}$ et $D_{v'}$ et soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
$u\circ v(x)$	$D_v\cap\{x\in\mathbb{R}\,/\,v(x)\in D_u\}$	$u'[v(x)]\times v'(x)$	$D_{v'}\cap\{x\in\mathbb{R}\,/\,v(x)\in D_{v'}\}$
$[v(x)]^n$	D_v	$n\times[v(x)]^{n-1}\times v'(x)$	$D_{v'}$
$\dfrac{1}{[v(x)]^n}$	$D_v\cap\{x\in\mathbb{R}\,/\,v(x)\neq 0\}$	$-\dfrac{n\times v'(x)}{[v(x)]^{n+1}}$	$D_{v'}\cap\{x\in\mathbb{R}\,/\,v(x)\neq 0\}$
$\sqrt{u(x)}$	$D_u\cap\{x\in\mathbb{R}\,/\,u(x)\geq 0\}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$D_{u'}\cap\{x\in\mathbb{R}\,/\,u(x)>0\}$
$u(ax+b)$	$\{x\in\mathbb{R}\,/\,ax+b\in D_u\}$	$a\times u'(ax+b)$	$\{x\in\mathbb{R}\,/\,ax+b\in D_{u'}\}$
$sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$a\times cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$-a\times sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$

6. Dérivée de la fonction réciproque

Théorème 1

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I vers l'intervalle $J=f(I)$ et $a\in I$ et $b=f(a)$.

- Si $\left.\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ dérivable en } a\\ \bullet\ f'(a)\neq 0\end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{l}\bullet\ f^{-1} \text{ dérivable en } b\\ \bullet\ (f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}\end{array}\right.$

- Si $\left.\begin{array}{l} * \ f \text{ dérivable sur } I \\ * \ (x\in I);\ f'(x)\neq 0 \end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{l} * \ f^{-1} \text{ dérivable sur } J=f(I) \\ * \ (\forall x\in J);\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]} \end{array}\right.$

Théorème 2

❖ La fonction Arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x\in\mathbb{R});(Arc\tan)'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

❖ Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x\mapsto Arc\tan\left[u(x)\right]$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x\in I);\left(Arc\tan\left[u(x)\right]\right)'=\dfrac{u'(x)}{1+\left[u(x)\right]^2}$

Théorème 3

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $r\in\mathbb{Q}^*$ et u une fonction définie sur un intervalle I

- La fonction $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a : $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*});\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\dfrac{\sqrt[n]{x^{n-1}}}{n}$
- Si $\left.\begin{array}{l} \bullet\ u \text{ dérivable sur } I \\ \bullet\ (\forall x\in I);u(x)>0 \end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{l} \bullet\ la\ \ fonction\ x\mapsto\sqrt[n]{u(x)} \text{ estdérivable sur } I \\ \bullet\ (\forall x\in I);\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{\sqrt[n]{\left(u(x)\right)^{n-1}}\times u'(x)}{n} \end{array}\right.$
- La fonction $x\mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a : $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*});\left(x^r\right)'=r\times x^{r-1}$
- Si $\left.\begin{array}{l} * \ u \text{ dérivable sur } I \\ * \ (\forall x\in I);u(x)>0 \end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{l} * \text{ La fonction } x\mapsto\left[u(x)\right]^r \text{ est dérivable sur } I \\ * \ (\forall x\in I);\left[\left\{u(x)\right\}^r\right]'=r\times\left[u(x)\right]^{r-1}\times u'(x) \end{array}\right.$

Règles de dérivation 3

Soit u une fonction définie sur D_u et dérivable sur $D_{u'}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $p\in\mathbb{Z}^*$ et $q\in\mathbb{N}^*$

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
$\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\sqrt[q]{x^p}=x^{\frac{p}{q}}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{p}{q}\times x^{\frac{p}{q}-1}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\sqrt[q]{\left[u(x)\right]^p}=\left[u(x)\right]^{\frac{p}{q}}$	$Si\ p>0;D_u\cap\left\{x\in\mathbb{R}/u(x)\geq 0\right\}$ $Si p<0;D_u\cap\left\{x\in\mathbb{R}/u(x)>0\right\}$	$\frac{p}{q}\times\left[u(x)\right]^{\frac{p}{q}-1}\times u'(x)$	$D_{u'}\cap\left\{x\in\mathbb{R}/u(x)>0\right\}$
$Arc\tan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

$Arc\tan\left[u(x)\right]$	D_u	$\dfrac{u'(x)}{1+\left[u(x)\right]^2}$	$D_{u'}$

II - Applications de la dérivation

1. Dérivation et monotonie d'une fonction

Théorème 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- ✫ f est une fonction constante sur I $\Leftrightarrow (\forall x \in I); f'(x)=0$
- ✫ f est une fonction croissante sur I $\Leftrightarrow (\forall x \in I); f'(x)\geq 0$
- ✫ f est une fonction décroissante sur I $(\forall x \in I); f'(x)\leq 0$
- ✫ ♦ $(\forall x \in I); f'(x)\geq 0$ ♦ L'équation $f'(x)=0$ admet un nombre fini de solutions dans I } alors la fonction f est strictement croissante sur I
- ✫ ♠ $(\forall x \in I); f'(x)\leq 0$ ♠ L'équation $f'(x)=0$ admet un nombre fini de solutions dans I } alors la fonction f est strictement décroissante sur I

Exercice

Etudier les variations des fonctions suivantes et dresser leur tableau de variation :

$$f(x)=x^3-7x+6\ ;\ g(x)=\frac{3x-2}{2x+1}\ ;\ h(x)=\frac{x^2+x+1}{2x+1}\ ;\ k(x)=\sqrt{1+x-x^2}\ ;\ \begin{cases} u(x)=\sqrt{x-1}-\frac{1}{4};x\geq 1 \\ u(x)=\frac{\sqrt{5-x}-2}{x-1};x<1 \end{cases}$$

2. Dérivation et extrémums d'une fonction

Théorème 2

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

- Si f admet un extrémum en a, alors $f'(a)=0$
- Si $\left.\begin{array}{l} * \ f'(a)=0 \\ * \ f' \text{ change de signe en } a \text{ sur } I \end{array}\right\}$ alors f admet un extrémum en a sur I

Remarque

Si $f'(a)=0$, on ne peut pas conclure que $f(a)$ est un extrémum de f. En effet si $f(x)=(x-1)^3+3$ on a $f'(x)=3(x-1)^2$ et $f'(1)=0$ .Comme la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ on a : $f(0)<f(1)<f(2)$ donc $f(1)=3$ n'est pas un extrémum de f sur $\mathbb{R}$.

3. Dérivation et convexité d'une fonction

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative

- Dire que la fonction f ou que la courbe (C_f) est convexe sur I signifie que (C_f) est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.

- Dire que la fonction f ou que la courbe (C_f) est concave sur I signifie que (C_f) est située entièrement en dessous de chacune de ses tangentes .

Théorème

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f ou sa courbe (C_f) est convexe sur I si, et seulement si, sa fonction drivée f' est croissante sur I.
- La fonction f ou sa courbe (C_f) est concave sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est décroissante sur I.

Corollaire

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée f' est dérivable sur I , on note sa dérivée seconde par f''.

- La fonction f ou sa courbe (C_f) est convexe sur I $\Leftrightarrow (\forall x \in I); f''(x) \geq 0$
- La fonction f ou sa courbe (C_f) est concave sur I $\Leftrightarrow (\forall x \in I); f''(x) \leq 0$

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative.

Dire qu'un point A de la courbe (C_f) est un point d'inflexion signifie que la courbe (C_f) traverse sa tangente en ce point .

Conséquences

Soit f une fonction définie et deux fois dérivables sur I et $a \in I$

- Si A est un point d'inflexion à la courbe (C_f) alors la courbe (C_f) change de concavité en A.
- Si la fonction dérivée f' change de sens de variation en a, alors la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse a.
- Si la fonction dérivée seconde f'' s'annule en a en changeant de signe en a, alors la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse a.
- Si la fonction dérivée f' s'annule en a sans changer de signe en a, alors la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse a.

Exercice

Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x+1)\sqrt{x^2-1}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ Etudier la dérivabilité à droite en $x_0 = 1$ et à gauche en $x_1 = -1$ et interpréter ses résultats graphiquement.

2/ a/ Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction f et calculer $f'(x)$

b/ Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation

3/ a/ Montrer que : $\left(\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[\right); f''(x)=\dfrac{\left(2x^2-2x-1\right)}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$

b/ Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées

b/ Etudier la concavité de la courbe (C_f)

III - Théorème de Rolle – Théorème des accroissements finis

Théorème de Rolle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux éléments de I tels que $a<b$.

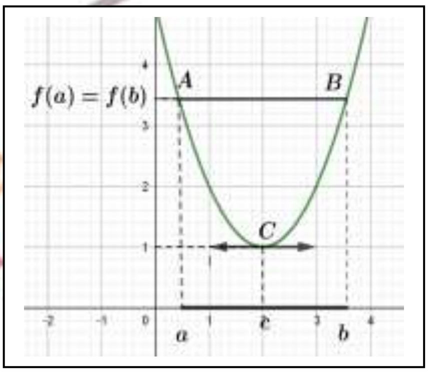
$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ continue sur } [a;b]\\ \bullet\ f \text{ dérivable sur }]a;b[\\ \bullet\ f(a)=f(b)\end{array}\right\}\text{ alors } \left(\exists c\in\left]a;b\right[\right);\ f'(c)=0$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3x^4-11x^3+12x^2-4x+2$.

Montrer que : $\left(\exists c\in\left]0;1\right[\right); f'(c)=0$.

Interprétation graphique du théorème de Rolle :



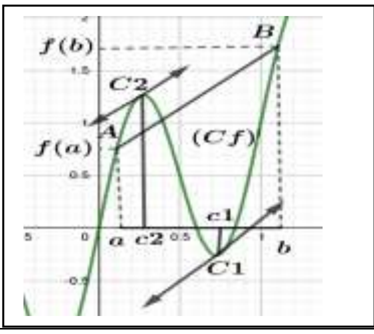
Soit f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ et $f(a)=f(b)$ et si $A(a;f(a))$ et $B(b;f(b))$ sont deux points de la courbe (C_f) alors il existe au moins un point C de la courbe (C_f) situé entre les points A et B où la tangente est horizontale

Théorème des accroissements finis : (TAF)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux éléments de I tels que $a<b$.

$$\text{Si}\left.\begin{array}{l} * f \text{ est continue sur } [a;b]\\ * f \text{ est dérivable sur }]a;b[\end{array}\right\}\text{ alors } \left(\exists c\in\left]a;b\right[\right);\ f(b)-f(a)=(b-a)\times f'(c)$$

Interprétation graphique du TAF



Soit f une fonction définie et continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ où a et b sont des réels tels que $a<b$ et $f(a)<f(b)$ et soitLa courbe deux points de (C_f) alors il existe au moins un point C d'abscisse c dans $]a;b[$ où la tangente est parallèle à la Droite (AB).

Théorème des inégalités des accroissements finis

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a et b deux réels de I et $k\in\mathbb{R}^{+*}$.

Si
- f continue sur $[a;b]$
- f dérivable sur $]a;b[$
- $(\forall x \in]a;b[);|f'(x)| < k$

alors $|f(b) - f(a)| < k \times |b-a|$

Illustration physique de ce théorème

Si la vitesse instantanée d'un véhicule ne dépasse pas 120km/h, alors sa vitesse moyenne ne dépassera pas non plus 120km/h entre deux points quelconques.

Exercice

Montrer que : $\forall(x;y) \in \mathbb{R}^2;|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sin t$. Soit x et y deux réels tels que $x \leq y$, la fonction f est continue sur $[x;y]$ et est dérivable sur $[x;y]$ donc sur $]x;y[$ et on a : $(\forall t \in [x;y])$; $|\cos t| \leq 1$ $donc$ $|f'(t)| \leq 1$;par conséquent et d'après le théorème des inégalités des accroissements finis on a : $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|$ $d'où$ $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$. CQFD.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. S'il existe m et M deux réels tels que $(\forall x \in]a;b[)$ $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$