Exercice 1

Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I. Montrer la **formule de Leibnitz** :

$$(\forall x \in I),\ (f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

En utilisant la formule de Leibnitz, déterminer $h^{(n)}(x)$ où $h(x) = (x^3 - x)\sin x$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f

2) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 1 et à gauche en 3, puis interpréter ces deux Résultats

3) Vérifier que : $(\forall x \in D_f \setminus \{1,2\}),\ f'(x) = \dfrac{2-x}{\sqrt{x-1}\sqrt{3-x}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)}$

4) Dresser le tableau de variation de la fonction f

5) Construire la courbe (C_f) représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 3

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + 1 - 2\arctan x$

1) Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}),\ g'(x) = \dfrac{x^2-1}{1+x^2}$

3) Dresser le tableau de variation de la fonction g

4) Etudier les branches infinies de la courbe (C_g) représentative de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

5) a) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_g) au point d'abscisse 0

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $-4 < \alpha < -3$

6) Construire la courbe (C_g)

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \arctan(x+1) - \arctan x$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, puis interpréter ces résultats graphiquement

2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}),\ f'(x) = \dfrac{-2x-1}{(1+x^2)\left(1+(x+1)^2\right)}$

3) Dresser le tableau de variation de la fonction f

4) En déduire que la fonction f admet un maximum dont on déterminera la valeur et pour quelle valeur il est atteint

5) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}),\ f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)$

6) a) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe (C_f) représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

b) Construire l'asymptote, la droite (T) et la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

Exercice 5

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ telle que : $f(0)=0$ et $f(1)=2$.

Montrer que : $(\exists c \in]0,1[),\ f'(c) = \dfrac{1}{\sqrt{c}}$

Exercice 6

Soient a et b tels que $a<b$ et g et h deux fonctions définies et continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telles que $(\forall x \in]a,b[), h'(x) \neq 0$ et $h(b) \neq h(a)$

1) Montrer que le théorème de Rolle s'applique à la fonction :

$$x \mapsto \left(g(b)-g(a)\right)g(x) - \left(h(b)-h(a)\right)h(x)$$

2) En déduire qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)} = \dfrac{g'(c)}{h'(c)}$

Exercice 7

En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finies, montrer que :

1) $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2), |\sin a - \sin b| \leq |a-b|$

2) $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2), |\arctan(a) - \arctan(b)| \leq |a-b|$

Exercice 8

Soit P la fonction polynômiale définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{P}(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$.

Montrer que l'équation $\mathrm{P}'(x) = 0$ admet au moins une solution sur $]0,1[$

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{1+\cos^2 x}$

Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, a+2\pi[$

Exercice 10

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction Arctan, montrer que :

$$(\forall t > 0),\ \mathrm{Arctan}(t) > \frac{t}{1+t^2}$$