Exercice 1

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $6f(x)+2f(-x)=3x^3-2x$

1) Montrer que la fonction f est impaire

2) Donner une expression de $f(x)$ pour tout réel x

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-E(x))(E(x)-x+2)$

1) Montrer que la fonction f est périodique de période 1

2) Tracer, dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle $[0,1[$

3) Tracer, dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle $[-3,3]$

Exercice 3

On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$

1) a) Déterminer D_f , l'ensemble de définition de f

b) Soient a et b deux réels positifs tels que $a \neq b$.

Montrer que $f(a)-f(b)=\dfrac{3\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{b}+1\right)}$

c) Déduire que la fonction f est croissante sur D_f

2) Montrer que f est bornée par -2 et 1

3) On considère la fonction numérique h définie sue $\mathbb{R}^+$ par $h(x)=\dfrac{\sqrt{x^3}-2}{\sqrt{x^3}+1}$

Etudier les variations de la fonction h

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+3}{x^2+x+1}$

1) Montrer que la fonction f est majorée par 3

2) Montrer que la fonction f est minorée par $\dfrac{5}{3}$

Exercice 5

On considère la fonction numérique u définie sur $]-\infty,3]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		-4		-2		0		3
$f(x)$	-2	↘	-5	↗	-1	↘	-3	↘	-7

1) Déterminer le signe de la fonction u

2) Déterminer le tableau de variation des fonctions suivantes :

a) $f(x)=3u(x)-5$

b) $g(x)=-4u(x)+2$

c) $h(x)=\dfrac{7}{u(x)}$

d) $i(x)=\dfrac{u(x)+2}{u(x)-3}$

e) $j(x)=\sqrt{5-2u(x)}$

f) $k(x)=-(u(x))^3$

Exercice 6

On considère les fonctions u et v définies par : $u(x)=\sqrt{x+1}$ et $v(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$

1) Montrer que la fonction v est bornée sur $\mathbb{R}$

2) Soit (C_u) la courbe représentative de la fonction u dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

a) Construire la courbe (C_u)

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $(I):(x+1)\sqrt{x+1}\leq 1$

c) Vérifier que si $a>1$, alors $-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ est solution de l'inéquation (I)

d) Montrer que $(\forall a\in]1,+\infty[)$, $\sqrt{\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}}<\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}$

Exercice 7

On considère la fonctions f définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

1) Montrer que la fonction f est minorée

2) a) Montrer que f est majorée par $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{2}$ est-il une valeur maximale de f ?

3) On pose $h(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=\dfrac{x+1}{(x+1)^2+1}$

a) Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a : $T_{(x,y)}=\dfrac{1-(x+1)(y+1)}{\left(1+(x+)^2\right)\left(1+(y+1)^2\right)}$

b) Etudier les variations de la fonction g sur les intervalles $[-1,0]$ et $[1,+\infty[$

c) Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a+b\geq 2$.

Montrer que $a+b+\dfrac{1}{a+b}\geq\dfrac{5}{2}$

d) Vérifier que $f=g\circ h$, puis étudier les variations de la fonction f sur D_f

Exercice 8

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=x^3+x^2+x$

1) a) Montrer que pour tout réel x, on a : $x^2+y^2+xy+x+y+1>0$

b) Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x\neq y$, on a : $T_{(x,y)}=x^2+y^2+xy+x+y+1$

c) En déduire les variations de la fonction f

2) Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1+x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$.

a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $g(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

b) En déduire les variations de la fonction g sur $]0,+\infty[$

c) Sans calcul, comparer $g(0,99)$ et $g(1,01)$

Exercice 9

On considère la fonction numérique h définie sur $[-2,+\infty[$ par : $h(x) = x+5-4\sqrt{x+2}$

1) Déterminer deux réels a et b pour que $h(x) = \left(\sqrt{x+2}+a\right)^2 + b$ pour tout $x \in [-2,+\infty[$

2) Montrer que la fonction h admet un minimum absolu que l'on déterminera

3) Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$, Résoudre l'inéquation $h(x) > \mathrm{A}$

4) En déduire que la fonction h n'est pas majorée

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin x + \cos x$

1) Vérifier que pout réel x, on a : $2-\left(f(x)\right)^2 = \left(\cos x - \sin x\right)^2$

2) En déduire les extremums de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 11

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = E(x) + E\left(x+\frac{1}{2}\right) - E(2x)$

1) Montrer que la fonction f est périodique de période 1

2) Donner les expressions de $f(x)$ sur chacun des intervalles $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ et $\left[\frac{1}{2},1\right[$

3) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}),\ E(x) + E\left(x+\frac{1}{2}\right) = E(2x)$