Exercice 1

1) Sachant que $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, calculer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

2) Calculer :

$\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$; $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$;

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

2) a) Montrer que : $\cos\frac{\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}=2\cos\frac{7\pi}{18}$

b) Montrer que : $\cos\frac{\pi}{18}\times\sin\frac{\pi}{18}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{9}$

c) Déduire la valeur de $\dfrac{\cos\frac{\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}}{\cos\frac{\pi}{18}\times\sin\frac{\pi}{18}}$

Exercice 2

Soient a, b et c trois réels.

1) Calculer : $\cos(a+b+c)$; $\sin(a+b+c)$; $\tan(a+b+c)$

2) Calculer : $\sin(3a)$; $\cos(3a)$ *et* $\tan(3a)$ en fonction de $\sin(a),\cos(a)$ *et* $\tan(a)$

Exercice 3

1) Soit x un nombre réel tel que $\cos x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ *et* $0<x<\frac{\pi}{2}$

a) Calculer $\cos(2x)$

b) En déduire la valeur de x

2) Simplifier l'expression : $\sqrt{\dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}}$

3) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\sqrt{2}\sin^2 x+\left(2-\sqrt{2}\right)\cos^2 x=\sin(2x)$

Exercice 4

1) Montrer que : $\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)\right)$ et que :

$\sin\left(\frac{5\pi}{9}\right)\times\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{9}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2) Montrer que : $\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)\times\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}$

3) En déduire que : $\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)\times\sin\left(\frac{3\pi}{9}\right)\times\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)=\frac{3}{16}$

Exercice 5

Calculer :

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\times\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$;

$\cos\left(\frac{7\pi}{24}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$; $\cos\left(\frac{7\pi}{24}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$; $\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$

Exercice 6

On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

1) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right),\ \sin\frac{\pi}{6}\times\sin\frac{k\pi}{3}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)\right]$

2) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right),\ \sin\frac{\pi}{6}\times S_n=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{6}-\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{6}\right)\right]$

3) Déduire que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right),\ S_n=2\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\times\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{6}\right)$

Exercice 7

1) Soit $a\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$.

Montrer que : $\frac{\sin(3a)}{\sin a}-\frac{\cos(3a)}{\cos a}=2$

2) Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que :

$\cos(3x)=4\cos^3 x-3\cos x$; $\cos(4x)=4\cos^4 x+4\sin^4 x-3$; $\sin(3x)=3\sin x-4\sin^3 x$

3) Soit α un réel tel que $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$.

Montrer que : $\frac{1-2\cos(\alpha)+\cos(2\alpha)}{1+2\cos(\alpha)+\cos(2\alpha)}=-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Exercice 8

1) Soit $a\in\mathbb{R}$. Montrer que : $\cos(a)\times\cos(2a)\times\cos(4a)\times\cos(8a)=\frac{\sin(16a)}{16\sin(a)}$

2) En déduire la valeur de : $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)\times\cos\left(\frac{4\pi}{17}\right)\times\cos\left(\frac{8\pi}{17}\right)$

Exercice 9

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$\cos(5x)=\cos x$; $\sin(3x)=-\sin(7x)$; $\sin(3x)=\cos x$; $2\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)-1=0$;

$\sqrt{3}\cos x+\sin x=-1$; $\cos(3x)\cos(5x)-\sin(3x)\sin(5x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $2\cos^2 x+5\cos x-3=0$

$2\cos^2 x+2\sin x\times\cos x=3$; $2\cos^2 x+\sin x-1=0$

Exercice 10

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$, l'équation suivante :

$\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}\sin(2x)+\sqrt{2}\cos(2x)$