Exercice 1

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

a) Si $u_0 = -1$ et $q = 2$, calculer u_n en fonction de n puis en déduire u_{10}

b) Si $u_3 = 2$ et $q = 3$, calculer u_5

c) Si $u_1 = 7$ *et* $u_3 = 112$, calculer q puis u_5

Exercice 2

Soit (v_n) une suite géométrique telle que son premier terme $v_0 = -3$ et sa raison $q = 2$.

1) Calculer v_1 et v_2

2) Déterminer v_n en fonction de n

3) Calculer les sommes $S_1 = v_0 + v_1 + \ldots + v_{10}$ *et* $S_2 = v_{11} + v_{12} + \ldots + v_{20}$

Exercice 3

Soit (w_n) une suite géométrique à termes positifs telle que $w_4 = 0,84$ *et* $w_6 = 5,25$.

1) Calculer la raison q de cette suite

2) Calculer w_0

3) Exprimer w_n en fonction de n

4) Calculer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=2}^{n} w_k$ pour tout entier $n \geq 2$

5) Donner le sens de variation de la suite (w_n)

Exercice 4

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

1) Si $u_0 = 4$ et $q = 2$, calculer la somme $S = \sum_{k=3}^{18} u_k$

2) Si $u_0 = 2$ et $q = 3$, calculer la somme $S = \sum_{k=0}^{21} u_k$

Exercice 5

Calculer les sommes suivantes :

$S_1 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$S_3 = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \ldots + 6144$

$$S_4 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots - \left(\frac{1}{3}\right)^7 + \left(\frac{1}{3}\right)^8$$

$S_5 = 27 + 81 + 243 + \ldots + 59049$

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$.

1) a) Calculer u_1 et u_2

b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? est-elle géométrique ? justifier la réponse

2) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

3) Soit (v_n) la suite numérique définie , pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) Exprimer, pour tout entier naturel n, en fonction de n.

c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1/ a/ Montrer que :$(\forall n \in \mathbb{N});1 \leq u_n \leq 6$

b/ Etudier le sens de variation de (u_n)

c/ En déduire la convergence de (u_n)

2/ Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N});v_n = u_n - 6$

a/ Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b/ Déterminer v_n *puis* u_n en fonction de n

c/ Calculer en fonction de n les sommes $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ *et* $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Exercice 8

On considère la suite numérique $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{n+1}{2n}a_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $\frac{1}{4} \leq a_n \leq 1$

b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante

2) Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $b_n = \frac{1}{n}a_n$

a) Montrer que la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique

b) Exprimer b_n en fonction de n

c) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $a_n = \frac{n}{2^n}$

3) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $(n+1)^2 = n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n tel que $n \geq 4$, on a : $n^2 \leq 2^n$