Exercice 1

Calculer les cinq premiers termes des suites suivantes :

a) (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$; b) $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), v_n = 2^{n-1} + 1 - \dfrac{1}{n}$

c) (a_n) définie par : $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{2}{1+a_n} \end{cases}$; d) (b_n) définie par : $\begin{cases} b_0 = 0, b_1 = 2 \\ b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n + 3 \end{cases}$

Exercice 2

1) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

a) Calculer u_1, u_2 *et* u_3

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 8 \times 2^n - 1$

c) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \geq 7$

2) On considère la suite numérique $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\begin{cases} v_1 = 4 \\ v_{n+1} = \sqrt{v_n + 7} \end{cases}$

a) Calculer v_2, v_3 *et* v_4

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), 2 \leq v_n \leq 4$

3) On considère la suite numérique (w_n) définie par : $\begin{cases} w_0 = 1, w_1 = 2 \\ w_{n+2} = 5w_{n+1} - 6w_n \end{cases}$

a) Calculer w_2, w_3 *et* w_4

b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), w_n = 2^n$

Exercice 3

On considère la suite (a_n) définie par : $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{1+2a_n}{2+a_n} \ (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) Calculer les quatre premiers termes de la suite (a_n)

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < a_n \leq 1$

3) Etudier la monotonie de la suite (a_n).

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, Justifier si la suite (a_n) est minorée, majorée ou bornée :

1) $a_n = \sin(n) - 3$; 2) $a_n = n + \cos(n)$; 3) $a_n = 3^n + 2n - 4$; 4) $a_n = \dfrac{1}{1+n^2}$; 5) $a_n = 5(-3)^n + 2$

Exercice 5

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1$

1) Calculer les termes u_1, u_2 *et* u_3

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n \leq n+3$

3) Etudier les variations de la suite (u_n).

Exercice 6

On considère la suite arithmétique (u_n).

1) Si $u_0 = -2\ et\ r = 2$, déterminer u_n en fonction de n et en déduire la valeur de u_{17}

2) Si $u_5 = 7\ et\ r = \frac{1}{2}$, déterminer u_n en fonction de n et en déduire la valeur de u_{21}

3) Si $u_7 = 12\ et\ u_{24} = 46$, déterminer la raison r puis u_n en fonction de n et en déduire la valeur de u_{100} et u_0

Exercice 7

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \sqrt{3+u_n^2}$ et soit (v_n) la suite numérique telle que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ v_n = u_n^2$

1) Calculer $u_1,\ v_0$ et v_1

2) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique dont on déterminera la raison

3) Exprimer v_n en fonction de n

4) Déduire une expression de u_n en fonction de n

Exercice 8

On considère la suite numérique (a_n) définie par : $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n+2}\ (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) a) Calculer les termes $a_1\ et\ a_2$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 < a_n \leq 1$

c) Montrer que la suite (a_n) est décroissante

2) On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ b_n = \frac{1}{a_n}$

a) Montrer que la suite (b_n) est arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Exprimer b_n en fonction de n

c) En déduire une expression de a_n en fonction de n.

Exercice 9 :

Calculer les sommes suivantes :

$S_1 = 3+5+7+\ldots+2023$

$S_2 = \frac{1}{3}+1+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}+\ldots+13$

$S_3 = -7-4-1+2+5+\ldots+23$

$S_4 = 5+1-3-7-\ldots-75$