Exercice 1

Déterminer le domaine de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\ln(2x-3)$
2) $f(x)=\ln\left((3x+1)(5-2x)\right)$
3) $f(x)=\ln\left(3x^2-2x+1\right)$
4) $f(x)=\ln\left(2x^2-3x+1\right)$
5) $f(x)=\ln\left(\dfrac{3-2x}{3x+4}\right)$
6) $f(x)=\ln(x-2)+3\ln(5-x)$
7) $f(x)=\dfrac{\ln x+2}{x-2}$
8) $f(x)=\dfrac{1-\ln(x+4)}{\ln(x)}$
9) $f(x)=\dfrac{x\ln(x-1)}{1-\ln|x|}$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1) $\ln x=0$
2) $\ln x=1$
3) $\ln(x+1)=\ln(2x-1)$
4) $2\ln x-\ln(5x-6)=0$
5) $(2+\ln x)\left(\ln(x+2)-1\right)=0$
6) $(\ln x)^2-3\ln x-4=0$
7) $\ln x+2\sqrt{\ln x}+3=0$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1) $\ln x>1$
2) $2-\ln x\leq 0$
3) $\ln(x-2)<\ln(3-x)$
4) $\ln x\left(2\ln x-1\right)\geq 0$
5) $(1-\ln x)(3-2\ln x)\leq 0$
6) $\dfrac{x-1}{1+\ln x}>0$
7) $\dfrac{2}{\ln x-1}\geq 1$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2-2\ln x$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\ln x}{x+2}$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x^2+3}$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2+3}$
6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x+3}$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$
8) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{3}{x}+2\ln x$
9) $\lim\limits_{x\to e^+} \dfrac{x-2}{x(1-\ln x)}$
10) $\lim\limits_{x\to1^-} \left(x^2-1\right)\ln(1-x)$
11) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{\ln^2 x+\ln x+3}$

Exercice 5

Etudier la continuité de la fonction f en x_0, dans chacun des cas suivants :

1) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{x+1} \;; x\in\left]-2,-1\right[\cup\left]-1,+\infty\right[\\ f(-1)=1 \end{cases}$; $x_0=-1$

2) $\begin{cases} f(x)=\ln x+2;\; x\geq 1 \\ f(x)=3+\dfrac{\ln(1-x)}{x};\; x<1 \end{cases}$; $x_0=1$

3) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x-4}-2};\; x>8 \\ f(8)=\dfrac{1}{3} \\ f(x)=\dfrac{\ln(9-x)}{24-3x} \;; x<8 \end{cases}$; $x_0=8$

Exercice 6

Etudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 et calculer $f'(x_0)$, dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\ln x \;;\; x_0=2$

2) $f(x)=\ln(2-x) \;;\; x_0=1$

3) $f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right);\; x_0=-1$

4) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{1+\ln x} \;; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$; $x_0=0$

5) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} \;; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$; $x_0=0$

6) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1} \;; x>0 \\ f(0)=0 \\ f(x)=\ln(1-x) \;; x<0 \end{cases}$; $x_0=0$

Exercice 7

Donner l'équation de la tangente (T_0) à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0, dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\ln x \;;\; x_0=1$

2) $f(x)=x\ln x;\; x_0=e$

3) $f(x)=x\ln x-x \;;\; x_0=e$

4) $f(x)=\ln(3x^2+x+e);\; x_0=0$

Exercice 8

On considère la fonction h définie par : $h(x)=\ln(ax+b)$ où a et b sont des constantes réelles, et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer les valeurs de a et b tels que $h(3)=0$ et $h'(2)=-2$

b) Déterminer le domaine de définition de la fonction h dans ce cas.

2) Déterminer les nombres a et b tels que la courbe (C) passe par le point $A(3,0)$ et

Dont la tangente au point $A(3,0)$ est parallèle à la droite d'équation $y=-2x$

Exercice 9

Partie I :

On considère la fonction numérique g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^2-2\ln x$

1) a) Etudier les variations de la fonction g

b) Dresser son tableau de variation

2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$

Partie II :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2 cm)

1) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu

2) a) Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=\frac{x}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C) et la droite (Δ)

d) Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) sur $]0,+\infty[$

3) a) Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f

4) Montrer qu'il existe un unique point B de la courbe (C) où la tangente (T) est Parallèle à la droite (Δ). Préciser les coordonnées du point B

5) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$

b) Montrer que $\ln\alpha=-\frac{\alpha^2+2}{2}$ (on admettra que $0,25<\alpha<0,5$)

6) Construire la courbe (C) et les droites (Δ) et (T) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$