Dans toute la suite de cette série, le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Exercice 1

On considère les vecteurs du plan $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\|=5$, $\vec{v}^2=3$ *et* $\vec{u}.\vec{v}=7$. Calculer :

$$\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right).\left(-\vec{u}+2\vec{v}\right) \ ; \ \left(2\vec{u}+\vec{v}\right)^2 \ ; \ \left(\vec{u}-2\vec{v}\right)^2 \ ; \ \|-2\vec{u}+3\vec{v}\| \text{ et } \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$$

Exercice 2

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB=7$, $AC=10$ et $AD=6$. Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

Exercice 3

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB=6\,\text{cm}$, $AC=8\,\text{cm}$ et H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC)

1) Faire une figure convenable
2) Calculer les longueurs AH, BH et CH
3) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$
4) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. Justifier la réponse

Exercice 4

Dans le plan, on considère les points $A(2,4)$, $B(-3,-1)$, $C(4,-2)$ et $D(9,3)$

1) Calculer AB *et* $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$
2) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un losange
3) Calculer $\cos\left(\widehat{ABC}\right)$ *et* $\cos\left(\widehat{BAD}\right)$

Exercice 5

Soit ABC un triangle tel que $AB=7$, $BC=9$ et $AC=5$.

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Exercice 6

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point $A(-1,2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2,5)$
2) On considère les points $A(2,-1)$, $B(-3,0)$ et $C(1,2)$
   a) Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice (Δ) du segment $[BC]$
   b) Calculer $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ *et* $\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$
   c) En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$
   d) Calculer la surface du triangle ABC

Exercice 7

1) Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C) de centre $\Omega(2,-3)$ et de rayon $r=\sqrt{2}$
2) Déterminer l'ensemble des points $M(x,y)$ dans chacun des cas suivants :
   a) $x^2+y^2-x+3y-4=0$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 4y + 5 = 0$

3) Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ tel que $A(2,3)$ *et* $B(0,1)$

4) Déterminer une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC tel que $A(1,2)$, $B(0,-1)$ et $C(-2,3)$

Exercice 8

Résoudre graphiquement les systèmes :

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 > 0 \\ x^2 + y^2 + 4x < 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 < 0 \\ x - y - 2 > 0 \end{cases}$

Exercice 9

Soit (C) le cercle de centre $\Omega(2,1)$ et de rayon $R = 2$

1) Vérifier que $A(0,1)$ est un point du cercle (C)

2) Ecrire une équation cartésienne de la tangente au cercle (C) au pont A

3) Etudier la position relative du cercle (C) avec la droite (D) d'équation $x - y + 2 = 0$.

Exercice 10

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'ensemble (C_m) des points $M(x,y)$ vérifiant :

$x^2 + y^2 - 2mx + (m+2)y - 3m - 4 = 0$

1) Montrer que (C_m) est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon en fonction de m

2) Déterminer (D) l'ensemble des centres des cercles (C_m) quand m varie dans $\mathbb{R}$.

3) Montrer que tous les cercles (C_m) passent par deux points fixes A et B dont on déterminera les coordonnées, puis vérifier que $(AB) \perp (D)$

4) Trouver tous les cercles (C_m) tangentes à la droite (Δ) d'équation $x + 2y + 2 = 0$