Exercice 1

1) Comparer les nombres A et B dans les cas suivants :

$$A=3-2\sqrt{2} \text{ et } B=\frac{1}{3+2\sqrt{2}} \quad ; \quad A=\frac{\sqrt{6}}{2}+1 \text{ et } B=\frac{1}{\sqrt{6}-2} \quad ; \quad A=2-\sqrt{3} \text{ et } B=\left(2-\sqrt{3}\right)^2$$

$$A=5+\sqrt{2} \text{ et } B=\sqrt{25+10\sqrt{2}} \;;\; A=\sqrt{10} \;\; et \;\; B=\sqrt{3}+\sqrt{7} \;;\; A=4\sqrt{5}-\sqrt{79} \;\; et \;\; B=9-4\sqrt{5}$$

Exercice 2

1) Soit $a \in \left]0,1\right]$. Comparer les nombres suivants :

$$a,\ a^2 \ et \ a^3 \quad ; \quad a \ et \ \frac{1}{a}$$

2) Soit $a \in \left[1,+\infty\right[$. Comparer les nombres suivants :

$$a,\ a^2 \ et \ a^3 \quad ; \quad a \ et \ \frac{1}{a}$$

3) Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Comparer les nombres suivants :

$$A=\frac{2a}{a^2+1} \ et \ B=\frac{2a-1}{a^2}$$, et en déduire une comparaison de $\frac{4,2}{5,1}$ et $\frac{3,2}{4,41}$

Exercice 3

On considère les intervalles suivants : $I=\left]-\infty,4\right]$, $J=\left]-6,5\right]$ et $K=\left]3,+\infty\right[$.

Déterminer les ensembles suivants :

$$I\cap J \;;\; I\cap K \;;\; I\cup J \;;\; I\cup K \;;\; J\cup K \;;\; J\cap K \;;\; I\cup J\cup K \text{ et } I\cap J\cap K$$

Exercice 4

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

1) On pose $A=\frac{9a+4b}{3a+2b}$. Montrer que : $2<A<3$

2) On pose $B=\frac{12a-10b}{3a-2b}$. Montrer que : $4<B<5$

Exercice 5

Soient a et b deux nombres réels tels que $1<a<b$. On pose $A=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ et $B=\sqrt{a-1}-\sqrt{b-1}$.

1) Préciser le signe de A et B

2) a) Montrer que $\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

b) Déduire que $0<\frac{A}{B}<1$ puis comparer A et B

3) Application : Comparer $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ et $\sqrt{3}-\sqrt{6}$

Exercice 6

Soient a et b deux nombres réels tels que $-7<a<4$ et $4<b<8$. Encadrer les nombres suivants :

$$3a-2b \;;\; ab \;;\; a^2 \;;\; b^2 \;;\; 3a^2+b^2-2a+b$$

Exercice 7

1) Ecrire les inégalités suivantes sous forme d'intervalles :

$$-2 \leq x \leq 5\ ;\ \frac{1}{2} < x < 3\ ;\ -4 < x \leq 1\ ;\ -3 \leq x \leq 2\ ;\ x \geq 5\ ;\ x > -2\ ;\ x \leq -3\ ;\ x < 5\ ;\ x < 0$$

2) Ecrire les intervalles suivants sous forme d'inégalités :

$$[-2,5]\ ;\ ]3,9]\ ;\ [-5,4[\ ;\ ]1,7[\ ;\ [-2,+\infty[\ ;\ ]5,+\infty[\ ;\ ]-\infty,6]\ ;\ ]-\infty,-1[\ ;\ ]-\infty,0[\ ;\ [0,+\infty[$$

Exercice 8

1) Ecrire sans valeur absolue les nombres suivants :

$$A = |2\pi - 7|\ ;\ B = \left|5\sqrt{5} - 8\sqrt{2}\right|\ ;\ C(x) = |2x-3|\ ;\ D(x) = |3x+2| + |x-5|\ ;\ F(x) = |2-x| - 2|x+3|$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$$|x-6| = 1\ ;\ |x+3| = 5\ ;\ \left|\frac{2x-3}{7}\right| = 2\ ;\ |3x+4| = |5-2x|\ ;\ |x+10| = -6\ ;\ |x+5| = 0$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

$$|x-2| \geq 1\ ;\ |x+5| \leq 3\ ;\ \left|\frac{2x-3}{7}\right| > 3\ ;\ |3x+4| < 7\ ;\ |x+10| \leq -6\ ;\ |x+5| \leq 10$$

Exercice 9

Soient a et b deux nombres réels tels que $|a| \leq 1$ et $|b| \leq 1$

1) Encadrer le nombre $ab+1$ et déduire que $ab+1 \neq 0$

2) Montrer que $\left|\frac{a+b}{ab+1}\right| \leq 1$