I – Produit scalaire de deux vecteurs

1 – Rappels

a – Expression du produit scalaire avec la projection

Définition

Soient A, B et C trois points du plan et H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, noté $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, est le nombre réel tel que :

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens (figure 1)
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ n'ont pas le même sens (figure 2)
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}\,(A = B)$, $\overrightarrow{AC} = \vec{0}\,(A = C)$ ou $\overrightarrow{AH} = \vec{0}\,(A = H)$ (figure 3)

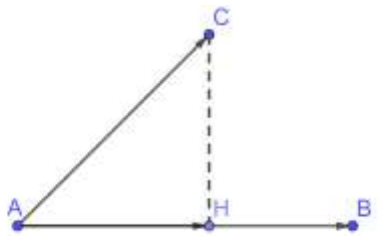


figure1

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$

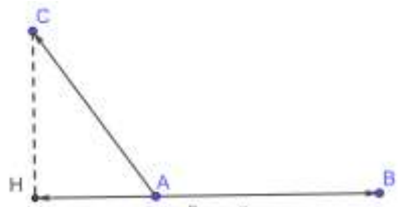


figure2

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

figure3

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

b – Expression trigonométrique du produit scalaire

Définition

- Soient A, B et C trois points du plan. Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$$

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Exemples

Calculer le produit scalaire $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

- $\|\vec{u}\| = 2,\ \|\vec{v}\| = 3$ *et* $\overline{(\vec{u}\,,\vec{v})} = \dfrac{\pi}{6}$
- $\|\vec{u}\| = 4,\ \|\vec{v}\| = 5$ *et* $\overline{(\vec{u}\,,\vec{v})} = \dfrac{5\pi}{6}$
- $\|\vec{u}\| = 7,\ \|\vec{v}\| = 8$ *et* $\overline{(\vec{u}\,,\vec{v})} = \dfrac{\pi}{2}$

c – Propriétés du produit scalaire

Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

- $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $\vec{u}.(\alpha.\vec{v}) = (\alpha.\vec{u}).\vec{v} = \alpha.(\vec{u}.\vec{v})$
- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$
- $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $(\vec{u} \perp \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

2 – Expression analytique du produit scalaire

Dans tout ce paragraphe, Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a – Définition

Définition

Soient $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ deux vecteurs du plan. Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ est le nombre réel défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$

Exemples

Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

$\vec{u}(1,2)\,;\,\vec{v}(-3,4)$; $\vec{u}(3,0)\,;\,\vec{v}(0,-5)$; $\vec{u}(-4,0)\,;\,\vec{v}(3,5)$

Réponses

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times(-3) + 2\times 4 = -3 + 8 = 5$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times 0 + 0\times(-5) = 0$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-4)\times 3 + 0\times 5 = -12$

Proposition

Soit $\vec{u}(x,y)$ un vecteur du plan. On a :

- $\vec{u}^{\,2} = x^2 + y^2$
- $\vec{u}\cdot\vec{i} = x$ et $\vec{u}\cdot\vec{j} = y$
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

b – Norme d'un vectaeur

Définition

Soit $\vec{u}(x,y)$ un vecteur du plan et $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points du plan.

- La norme du vecteurs $\vec{u}(x,y)$ est le nombre réel positif : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$
- La distance de A à B est le nombre réel positif : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2}$

Exemples

1) Calculer $\|\vec{u}\|$ dans chacun des cas suivants :

$\vec{u}(1,2)$; $\vec{u}(-2,3)$; $\vec{u}(-3,-4)$; $\vec{u}(0,-5)$

2) Calculer la distance AB dans chacun des cas suivants :

$A(-1,1)$ et $B(3,4)$; $A(2,-1)$ et $B(0,-4)$; $A(4,0)$ et $B\left(-3,\frac{1}{2}\right)$

Propriétés

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et ABC un triangle. Alors, on a :

- $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (Inégalité triangulaire)
- $(\forall \alpha \in \mathbb{R}),\ \|\alpha\cdot\vec{u}\| = |\alpha| \times \|\vec{u}\|$
- $\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \leq \|\vec{u}+\vec{v}\|$

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$
- $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
- $AB\leq AC+CB$, $AC\leq AB+BC$ et $BC\leq BA+AC$

Exemples

Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que : $\|\vec{u}\|=6,\ \|\vec{v}\|=5$ et $\vec{u}.\vec{v}=-12$

a) Calculer $(\vec{u}+2\vec{v}).(3\vec{u}-\vec{v})$

b) Calculer $(\vec{u}+2\vec{v})^2$ et en déduire $\|\vec{u}+2\vec{v}\|$

c) Calculer $\cos(\vec{u},\vec{v})$

c – Formules de $\cos(\vec{u},\vec{v})$ *et* $\sin(\vec{u},\vec{v})$

Proposition

Soient $\vec{u}(x,y)$ *et* $\vec{v}(x',y')$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors, on a :

- $\cos(\overline{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$
- $\sin(\overline{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\frac{\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}=\frac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$

Remarque

Si $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ *et* $C(x_C,y_C)$, alors :

- $\cos(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\frac{(x_B-x_A)(x_C-x_A)+(y_B-y_A)(y_C-y_A)}{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}}$
- $\sin(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{AB\times AC}=\frac{(x_B-x_A)(y_C-y_A)+(y_B-y_A)(x_C-x_A)}{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}}$

Exemples

1) Calculer $\cos(\overline{\vec{u},\vec{v}})$ et $\sin(\overline{\vec{u},\vec{v}})$ dans chacun des cas suivants :

$\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ *et* $\vec{v}=5\vec{i}+2\vec{j}$; $\vec{u}(3,-1)$ *et* $\vec{v}=4\vec{j}$

2) Calculer $\cos(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ et $\sin(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ dans chacun des cas suivants :

$A(1,-3)$, $B(3,1)$ *et* $C(2,0)$; $A(-2,1)$, $B(5,-2)$ *et* $C(0,2)$

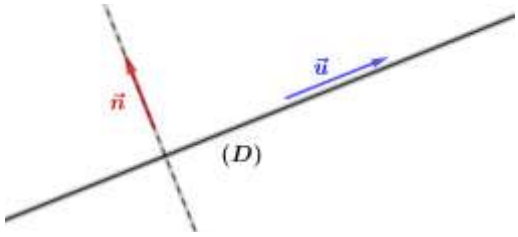
II – Applications du produit scalaire

1 – Etude analytique des droites dans le plan

a – Vecteur normal à une droite

Définition

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit **un vecteur normal** à une droite (D) si et seulement si la direction de $\vec{n}$ est orthogonale à la droite (D).



Proposition 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit (D) une droite du plan de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\vec{n}$ un vecteur non nul. Alors :

$\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite (D) si et seulement si $\vec{n}.\vec{u}=0$

Proposition 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit (D) une droite du plan.

- Si $\vec{n}$ et $\vec{n}\,'$ sont deux vecteurs normaux à la droite (D), alors $\vec{n}$ et $\vec{n}\,'$ sont colnéaires
- $\vec{n}(a,b)$ est un vecteur normal à la droite (D) si et seulement si $\vec{u}(-b,a)$ est un vecteur directeur de la droite (D)

b – Equation d'une droite définie par un point et un vecteur normal

Proposition 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

- Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a,b)$, où $(a,b)\neq(0,0)$, a une équation de la forme $ax+by+c=0$ où $c\in\mathbb{R}$
- Etant donné trois nombres réels a, b et c tels que $(a,b)\neq(0,0)$, l'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant l'équation $ax+by+c=0$ est une droite de vecteur normal $\vec{n}(a,b)$

Proposition 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit (D) une droite passant par un point $\mathrm{A}(x_A,y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(a,b)$ tel que $(a,b)\neq(0,0)$, alors : une équation cartésienne de la droite (D) est :

$$ax+by-ax_A-by_A=0$$

Exemples

1) Soit (D) la droite passant par le point $\mathrm{A}(1,-2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2,3)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D).

2) Soient $\mathrm{E}(1,-1)$ et $\mathrm{F}(3,5)$ deux points du plan. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice (Δ) du segment $[\mathrm{EF}]$

Réponses

1) (D) la droite passant par $\mathrm{A}(1,-2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2,3)$

- Méthode 1 : Puisque $\vec{n}(2,3)$ est un vecteur normal à (D), alors une équation cartésienne de (D) est : $2x+3y+k=0$
  Et puisque $\mathrm{A}(1,-2)\in(\mathrm{D})$, alors on a : $2\times1+3\times(-2)+k=0 \Leftrightarrow k=4$
  D'où $(\mathrm{D}): 2x+3y+4=0$
- Méthode 2 : $\mathrm{M}(x,y)\in(\mathrm{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}\perp\vec{n} \Leftrightarrow 2(x-1)+3(y+2)=0$
  $\Leftrightarrow 2x+3y+4=0$
  D'où $(\mathrm{D}): 2x+3y+4=0$

2) (Δ) est la médiatrice du segment $[\mathrm{EF}]$, donc (Δ) passe par le milieu I de $[\mathrm{EF}]$ et $\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ est un vecteur normal à (Δ). $\mathrm{I}\left(\frac{1+3}{2},\frac{-1+5}{2}\right)$ et $\vec{n}(3-1,5+1)$ donc $\mathrm{I}(2,2)$ et $\vec{n}(2,6)$

Donc (Δ) : $2x+6y-2\times2-6\times2=0 \Leftrightarrow 2x+6y-16=0$. Alors (Δ) : $x+3y-8=0$

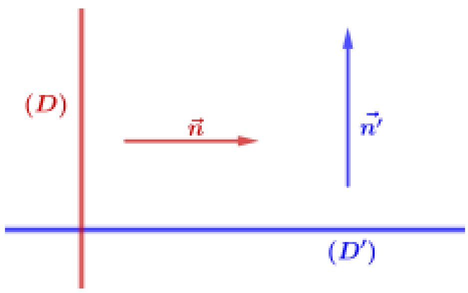
c – Droites perpendiculaires

Proposition

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soient (D) et $(\mathrm{D'})$ deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{n}(a,b)$ *et* $\vec{n}'(a',b')$. Alors :

$$(D)\perp(D') \Leftrightarrow \vec{n}\perp\vec{n}' \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n}'=0 \Leftrightarrow aa'+bb'=0$$



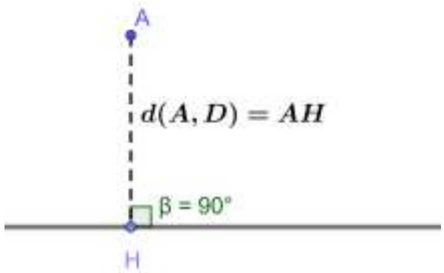
d – Distance d'un point à une droite

Proposition

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit (D) une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ où $(a,b)\neq(0,0)$ et soit $\mathrm{A}(x_A,y_A)$ un point du plan.
La distance du point A à la droite (D) est donnée par :

$$d(\mathrm{A},\mathrm{D})=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



Exemples

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère les points

$A(1,1)$; $B(1,3)$ et $C(-1,1)$

1) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (BC)

2) Calculer la distance entre le point A et la droite (BC)

2 – Etude analytiques des cercles dans le plan

a – Equation cartésienne d'un cercle

Définition

Soit Ω un point du plan et $R \in \mathbb{R}$.

Le **cercle** $\mathcal{C}$ de **centre** Ω et de **rayon** R est l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = R$

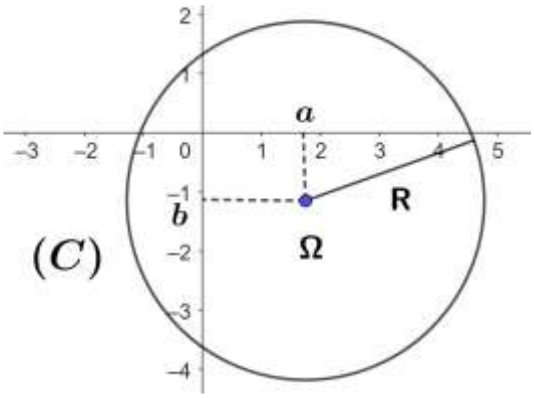
Donc : $M \in \mathcal{C}(\Omega,R) \Leftrightarrow \Omega M = R$

Proposition 1 (Cercle de centre donné et de rayon donné)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, et soit $\Omega(a,b)$ et $R \geq 0$.

Une équation cartésienne d'un cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R est :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \text{ où } c=a^2+b^2-R^2$$

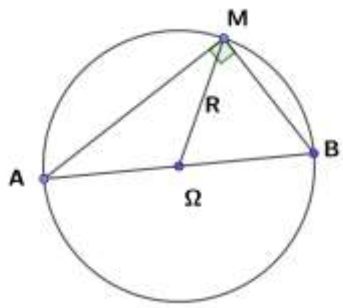


Proposition 2 (Cercle de diamètre donné)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, et soient $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points du plan.

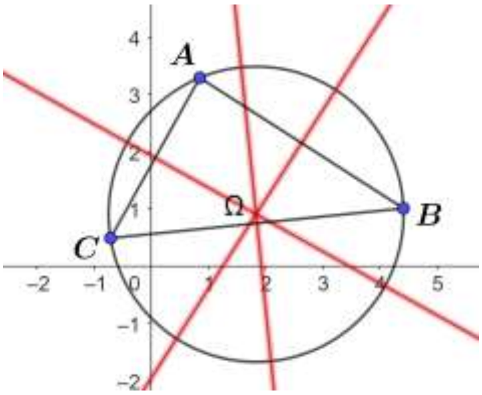
- L'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre $[AB]$, de centre le point Ω milieu de $[AB]$ et de rayon $R=\dfrac{AB}{2}$
- Une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est :

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-(x_A+x_B)x-(y_A+y_B)y+(x_Ax_B+y_Ay_B)=0$$



Proposition 3

Par trois points distincts A, B et C passe un cercle et un seul de centre Ω, le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC et de rayon $R = \Omega A$.
Ce cercle est appelé le cercle circonscrit au triangle ABC



b – Représentation paramétrique d'un cercle

Définition

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soient $\Omega(a,b)$ et $R \geq 0$.

Le système $\begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R

c – Positions relatives d'une droite et d'un cercle

Proposition

Soient (Δ) une droite et $\mathcal{C}(\Omega,R)$ un cercle de centre le point Ω et de rayon $R > 0$.

- Si $d(\Omega,(\Delta)) > R$, alors (Δ) et $\mathcal{C}(\Omega,R)$ ne se coupent pas (figure 1)
- Si $d(\Omega,(\Delta)) < R$, alors (Δ) et $\mathcal{C}(\Omega,R)$ ont exactement deux points communs (figure 2)
- Si $d(\Omega,(\Delta)) = R$, alors (Δ) et $\mathcal{C}(\Omega,R)$ ont un seul point commun. Dans ce cas on dit que la droite (Δ) est une tangente au cercle $\mathcal{C}(\Omega,R)$. (figure 3)

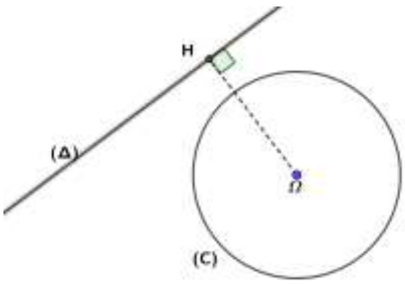


Figure 1

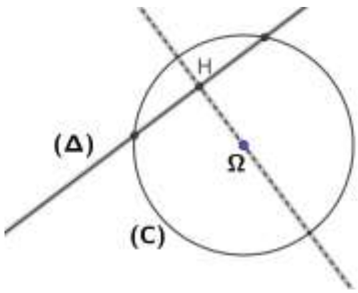


Figure 2

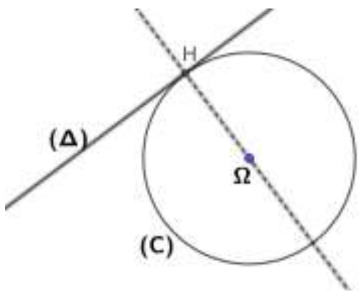


Figure 3

d – Equation de la tangente à un cercle

Proposition

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ et $A(x_A, y_A)$ un point du cercle $\mathcal{C}$.

L'équation de la tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point $A(x_A, y_A)$ est :

$$x x_A + y y_A - a(x + x_A) - b(y + y_A) + c = 0$$

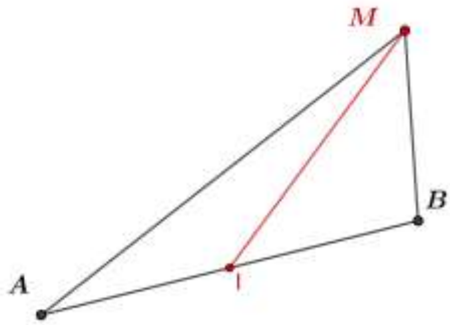
3 – Relations métriques dans un triangle

a – Théorème de la médiane

Théorème de la médiane

Soient A et B deux points du plan, et I le milieu du segment $[AB]$. Pour tout point M du plan, on a

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$



Exemple

ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 12$. Calculer la longueur AI où I est le milieu du segment $[BC]$.

Réponse

On a d'après le théorème de la médiane : Pour tout point M du plan on a $MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}BC^2$

En prenant $M = A$, on a $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$ donc $6^2 + 8^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2} \times 12^2$

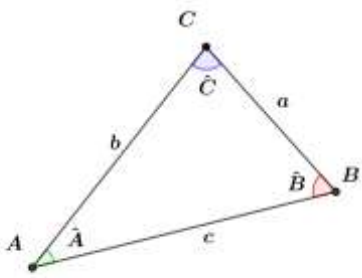
Donc $AI^2 = 14$ d'où $AI = \sqrt{14}$

b – Théorème d'AL KASHI

Théorème d'AL KASHI

On considère un triangle ABC. On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\hat{A} = BAC$, $\hat{B} = ABC$ et $\hat{C} = ACB$. On a :

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\hat{B})$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C})$



Exemple

ABC est un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 10$ et $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$. Calculer la longueur BC

Réponse

D'après le théorème d'AL KASHI , on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\hat{A})$

Donc $BC^2 = 7^2 + 10^2 - 2 \times 7 \times 10 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 149 - 140 \times \frac{1}{2} = 79$

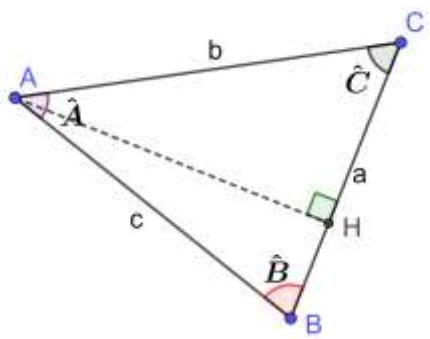
Ainsi $BC = \sqrt{79}$

c – Aire d'un triangle

Proposition

Soit ABC un triangle. On note S son aire , $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\hat{A} = BAC$, $\hat{B} = ABC$ et $\hat{C} = ACB$. Alors, on a :

$$S = \frac{1}{2} bc\sin(\hat{A}) = \frac{1}{2} ac\sin(\hat{B}) = \frac{1}{2} ab\sin(\hat{C})$$



d – Formule des sinus

Proposition

On considère un triangle ABC. On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\hat{A} = BAC$, $\hat{B} = ABC$ et $\hat{C} = ACB$. Alors, on a :

$$\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$$

Exemple

ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $\hat{A} = 50^\circ$ et $\hat{B} = 75^\circ$. Calculer AC et BC et donner les valeurs arrondies au dixième

Réponse

On a $\hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 55^\circ$, en utilisant les formules des sinus on a :

$$\frac{AB}{\sin(\hat{C})} = \frac{AC}{\sin(\hat{B})} = \frac{BC}{\sin(\hat{A})} \quad \text{donc} \quad \frac{5}{\sin(45)} = \frac{AC}{\sin(75)} = \frac{BC}{\sin(60)}$$

Alors $AC = \frac{5 \times \sin(75)}{\sin(45)} \simeq 6,9$ *et* $BC = \frac{5 \times \sin(60)}{\sin(45)} \simeq 6,1$