I – Généralités sur les suites numériques

1 – Définition et vocabulaire

Définition

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$) vers $\mathbb{R}$

$$u:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$$

$$n\mapsto u(n)=u_n$$

- L'application u s'appelle **une suite numérique** et est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- L'image de l'entier naturel n par l'application u s'appelle **le terme général de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- L'entier naturel n s'appelle **l'indice du terme** u_n

Exemples

- La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ u_n=(2n-1)^4$
- La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $v_1=2$ et $(\forall n\in\mathbb{N}^*),\ v_{n+1}=\dfrac{2v_n+1}{3}$

2 – Modes de génération d'une suite numérique

On peut définir une suite numérique de deux manières différentes :

- **Expression explicite** (Suite explicite)
  Est un mode de génération où **le terme général de la suite est défini en fonction de n**

  $$a_n=\sqrt{2n^2+3}\quad ;\quad b_n=\frac{3n-4}{n+2}\quad ;\quad u_n=\cos(n+5)$$

  Autrement dit : $u_n=f(n)$ où f est une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$

- **Relation de récurrence** (Suite récurrente)
  Est un mode de génération où **le premier terme et une relation entre deux ou plusieurs termes consécutifs sont donnés**

  $$\begin{cases}u_0=-1\\ u_{n+1}=3u_n+1\ (\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}\quad ;\quad \begin{cases}v_1=0\\ v_{n+1}=\dfrac{v_n+4}{2v_n+1}\ (\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}\quad ;\quad \begin{cases}w_2=-4\\ w_{n+1}=\sqrt{2w_n^2+3}\ (\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}$$

  Autrement dit : $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Exemples

Déterminer les 4 premiers termes de la suite dans chacun des cas suivants :

- $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ u_n=\dfrac{2n+1}{n+2}$
- $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $v_1=0$ et $(\forall n\in\mathbb{N}),\ v_{n+1}=\dfrac{2v_n+1}{v_n+2}$

II – Suite majorée – Suite minorée – Suite bornée

Définition

Soient $n_0\in\mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique.

- On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **majorée** si et seulement si $(\exists M\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0): u_n\leq M$
- On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **minorée** si et seulement si $(\exists m\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0): u_n\geq m$
- On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **bornée** si et seulement si elle est **majorée et minorée**

Remarque

- Pour montrer qu'une suite explicite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée par M (respectivement minorée par m), on montrera par un raisonnement direct que $u_n - \mathrm{M} \leq 0$ (respectivement $u_n - m \geq 0$)
- Pour montrer qu'une suite récurrente $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée par M (respectivement minorée par m), on utilise un raisonnement par récurrence
- Il existe des suites numériques qui ne sont pas bornées et des suites qui ne sont pas majorées et des suites qui ne sont pas minorées

Exemples

1) Montrer que la suite numérique (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$, est minorée par $\dfrac{1}{3}$

2) Montrer que la suite numérique (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \sqrt{2+v_n} \end{cases}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, est majorée par 2.

3) Soit (w_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \dfrac{7w_n - 1}{2w_n + 3} \end{cases}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 1 \leq w_n \leq 3$

Réponses

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2n+1}{n+3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{6n+3-n-3}{3(n+3)} = \dfrac{5n}{3(n+3)}$

Puisque $5n \geq 0$ et $3(n+3) > 0$ alors $u_n - \dfrac{1}{3} \geq 0$ donc $u_n \geq \dfrac{1}{3}$. D'où la suite (u_n) est minorée par $\dfrac{1}{3}$.

2) Raisonnons par la récurrence. Posons $P : "v_n \leq 2"$, $n \in \mathbb{N}$

- Initialisation :
  Pour $n = 0$, on a $v_0 = 0$ donc $v_0 \leq 2$ alors P est vraie pour $n = 0$
- Hérédité :
  Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $v_n \leq 2$ (HR) et montrons que $v_{n+1} \leq 2$
  D'après (HR) on a : $v_n \leq 2 \Rightarrow 2 + v_n \leq 4$
  $\Rightarrow \sqrt{2+v_n} \leq 2$
  $\Rightarrow v_{n+1} \leq 2$
  Donc P est vraie pour $n+1$
- Conclusion :
  $(\forall n \in \mathbb{N}),\ v_n \leq 2$

Alors la suite (v_n) est majorée par 2.

3) Posons P : « $1 \leq w_n \leq 3$ », $n \in \mathbb{N}$

- Initialisation :
  Pour $n = 0$, on a $w_0 = 1$ donc $1 \leq w_0 \leq 3$, alors P est vraie pour $n = 0$
- Hérédité :
  Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $1\leq w_n\leq 3$ (HR) et montrons que $1\leq w_{n+1}\leq 3$

- On a : $w_{n+1}-1=\dfrac{7w_n-1}{2w_n+3}-1=\dfrac{7w_n-1-2w_n-3}{2w_n+3}=\dfrac{5w_n-4}{2w_n+3}$

  Comme $1\leq w_n\leq 3$ alors $5w_n-4\geq 0$ et $2w_n+3>0$, donc $w_{n+1}-1\geq 0$. D'où $w_{n+1}\geq 1$
- On a : $w_{n+1}-3=\dfrac{7w_n-1}{2w_n+3}-3=\dfrac{7w_n-1-6w_n-9}{2w_n+3}=\dfrac{w_n-10}{2w_n+3}$

  Comme $1\leq w_n\leq 3$ alors $w_n-10<0$ et $2w_n+3>0$, donc $w_{n+1}-3\leq 0$. D'où $w_{n+1}\leq 3$

Alors P est vraie pour $n+1$

❋ Conclusion :

$(\forall n\in\mathbb{N}), 1\leq w_n\leq 3$

Proposition

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si et seulement si : $(\exists\alpha>0)(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0), |u_n|\leq\alpha$

III – Monotonie d'une suite numérique

Définition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique.

- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **croissante** si et seulement si :

  $(\forall(n,m)\in\mathbb{N}^2), [n\geq m\geq n_0\Rightarrow u_n\geq u_m]$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **décroissante** si et seulement si :

  $(\forall(n,m)\in\mathbb{N}^2), [n\geq m\geq n_0\Rightarrow u_n\leq u_m]$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **monotone** si et seulement si elle est croissante ou décroissante $(u_n)_{n\geq n_0}$

Proposition 1

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique.

- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante si et seulement si $(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0), u_{n+1}\geq u_n$
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante si et seulement si $(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0), u_{n+1}>u_n$
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante si et seulement si $(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0), u_{n+1}\leq u_n$
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante si et seulement si $(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0), u_{n+1}<u_n$

Proposition 2

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique telle que $(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0), u_n>0$

- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante si et seulement si $(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0), \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante si et seulement si $(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0), \dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante si et seulement si $(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0), \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$

❖ La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante si et seulement si $(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0),\ \frac{u_{n+1}}{u_n}<1$

Exemple

1) Etudier la monotonie de la suite (u_n) définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ u_n=\frac{5n-3}{2n+7}$

2) Etudier la monotonie de la suite (v_n) définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ v_n=\frac{2^{5n}}{3^{2n+1}}$

3) On considère la suite (w_n) définie par : $w_0=-\frac{1}{2}$ et $(\forall n\in\mathbb{N}),\ w_{n+1}=\frac{w_n}{\sqrt{w_n+2}}$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ -1<w_n<0$

b) Montrer que la suite (w_n) est strictement croissante

IV – Suite arithmétique

Définition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique.

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **arithmétique** si et seulement si :

$$(\exists r\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0): u_{n+1}-u_n=r$$

Le réel r est appelé **La raison de la suite arithmétique** $(u_n)_{n\geq n_0}$

Exemples

- La suite (u_n) définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}), u_n=-2n+5$ est une suite arithmétique de raison $r=-2$
- La suite (a_n) définie par : $a_0=1\ et\ (\forall n\in\mathbb{N}),\ a_{n+1}=a_n+7$ est une suite arithmétique de raison $r=7$
- La suite (x_n) définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}), x_n=n^2+1$ n'est pas arithmétique car : $x_1-x_0=2-1=1$ et $x_2-x_1=5-2=3$ donc $x_2-x_1\neq x_1-x_0$

Propriété caractéristique d'une suite arithmétique

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique si et seulement si : $(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0),\ u_{n+1}=\frac{u_n+u_{n+2}}{2}$

Remarque

Trois nombres réels $a, b\ et\ c$ sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $2b=a+c$

Proposition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0)(\forall p\in\mathbb{N}, p\geq n_0),\quad u_n=u_p+(n-p)\times r$$

Remarques

- Si u_0 est le premier terme de la suite arithmétique (u_n), alors on a : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ u_n=u_0+n\times r$
- Si u_1 est le premier terme de la suite arithmétique $(u_n)_{n\geq 1}$, alors on a :

  $(\forall n\in\mathbb{N}^*),\ u_n=u_1+(n-1)\times r$

Exemples

1) Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $r=-3$ et $u_3=12$.

a) Déterminer u_n en fonction de n

b) En déduire les valeurs de u_{50} et u_{100}

2) Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite arithmétique telle que $v_{12}=51\ et\ v_7=36$

a) Calculer sa raison r

b) Déterminer v_n en fonction de n

c) En déduire la valeur de v_{100}

Proposition (Somme des n premiers termes)

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique . Soient n et p deux entiers naturels tels que $n\geq p\geq n_0$. Alors :

$$u_p+u_{p+1}+...+u_n=(n-p+1)\times\frac{u_p+u_n}{2}$$

Cas particuliers

- $u_0+u_1+...+u_n=(n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2}$
- $u_1+u_2+...+u_n=(n)\times\frac{u_1+u_n}{2}$
- $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Exemples

1) Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_2=18\ et\ u_{15}=44$. Calculer $\sum_{k=2}^{k=15}u_k=u_2+u_3+...+u_{15}$

2) Soit (v_n) la suite arithmétique telle que $v_3=5$ et $\sum_{k=3}^{20}v_k=549$. Calculer v_{20} et la raison r

Réponses

1) Puisque la suite (u_n) est arithmétique alors $\sum_{k=2}^{15}u_k=(15-2+1)\times\frac{u_2+u_{15}}{2}=14\times\frac{18+44}{2}=434$

2) (v_n) étant une suite arithmétique, donc

$$\sum_{k=3}^{20}v_k=(20-3+1)\times\frac{v_3+v_{20}}{2}=18\times\frac{5+v_{20}}{2}=9(5+v_{20})=549$$

Donc $5+v_{20}=\frac{549}{9}=61$ D'où $v_{20}=61-5=56$

Et on a : $v_{20}=v_3+(20-3)\times r=5+17\times r=56$ alors $r=\frac{56-5}{17}=\frac{51}{17}=3$

V – Suite géométrique

Définition

Soit $(v_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique.

On dit que $(v_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique si et seulement si :

$$\left(\exists q\in\mathbb{R}^*\right)\left(\forall n\in\mathbb{N},n\geq n_0\right),\ v_{n+1}=q\times v_n$$

Le réel q s'appelle **la raison de la suite géométrique** $\left(v_n\right)_{n\geq n_0}$

Exemples

- La suite $\left(b_n\right)$ définie par : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\ v_n=2^{n+1}$ est une suite géométrique de raison $q=2$.
- La suite $\left(\beta_n\right)_{n\geq 1}$ définie par : $\beta_1=\frac{1}{2}$ et $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right),\beta_{n+1}=3\times\beta_n$ est une suite géométrique de raison $q=3$
- La suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right),x_n=n^2$ n'est pas une suite géométrique car on a $\frac{x_2}{x_1}=\frac{2^2}{1^2}=4$ et $\frac{x_3}{x_2}=\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}$ donc $\frac{x_2}{x_1}\neq\frac{x_3}{x_2}$

Propriété caractéristique d'une suite géométrique

Une suite $\left(v_n\right)_{n\geq n_0}$ est géométrique si et seulement si $\left(\forall n\in\mathbb{N},n\geq n_0\right),\ v_{n+1}^2=v_n\times v_{n+2}$

Remarque

Trois nombres réels $a,\ b\ et\ c$ sont des termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $b^2=a\times c$

Proposition

Soit $\left(v_n\right)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q. Alors :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N},n\geq n_0\right)\left(\forall p\in\mathbb{N},p\geq n_0\right),\quad v_n=v_p\times q^{n-p}$$

Remarque

- Si v_0 est le premier terme de la suite géométrique $\left(v_n\right)$, alors on a : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\ u_n=u_0\times q^n$
- Si v_1 est le premier terme de la suite géométrique $\left(v_n\right)_{n\geq 1}$, alors on a : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right),\ u_n=u_1\times q^{n-1}$

Exemples

1) Soit $\left(u_n\right)$ la suite géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ et $u_3=2$.

a) Déterminer u_n en fonction de n

b) Calculer u_{10} et u_0

2) Soit $\left(\alpha_n\right)$ une suite géométrique telle que $\alpha_2=5$ et $\alpha_5=\frac{5}{27}$

a) Déterminer sa raison q

b) Ecrire α_n en fonction de n

Proposition 1

Soit q un nombre réel tel que $q\neq 1$. Alors, on a : $1+q+q^2+...+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Proposition 2

Soit $\left(v_n\right)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison $q\neq 1$. Soient n et p deux entiers naturels tels que $n\geq p\geq n_0$.Alors :

$$\sum_{k=p}^{n} v_k = v_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Cas particuliers

- $\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- $\sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 \times \frac{1-q^{n}}{1-q}$

Exemple

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 4 \ et \ (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$

1) a) Calculer u_1, u_2 et u_3

b) Justifier que la suite (u_n) n'est ni géométrique ni arithmétique

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), v_n = u_n - 2$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

c) Calculer $\mathrm{S} = v_0 + v_1 + ... + v_9 \ \ et \ \ \mathrm{T} = u_0 + u_1 + ... + u_9$

Réponse

On a $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$

1) a) $u_1 = \frac{1}{2} \times u_0 + 1 = 3$; $u_2 = \frac{1}{2} \times u_1 + 1 = \frac{5}{2}$; $u_3 = \frac{1}{2} \times u_2 + 1 = \frac{9}{4}$

b) * On a : $u_2 - u_1 = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2} \ et \ u_1 - u_0 = 3 - 4 = -1$. Donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$. Alors (u_n) n'est pas arithmétique

*On a : $\frac{u_1}{u_2} = \frac{3}{\frac{5}{2}} = \frac{6}{5} \ et \ \frac{u_0}{u_1} = \frac{4}{3}$. Donc $\frac{u_1}{u_2} \neq \frac{u_0}{u_1}$. Alors la suite (u_n) n'est pas géométrique

2) On a $(\forall n \in \mathbb{N}), v_n = u_n - 2$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n$. Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 2$

b) On a : $v_n = v_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}$ et $u_n = v_n + 2 = \frac{1}{2^{n-1}} + 2$

c) On a : $S = v_0 \times \frac{1-q^{10}}{1-q} = 2 \times \frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{1-\frac{1}{2}} = 4 - \frac{1}{2^8}$ et $S' = \underbrace{(v_0+2)+(v_1+2)+\ldots+(v_9+2)}_{10\ fois\ 2}$

Donc $S' = S + 10 \times 2 = 4 - \frac{1}{2^8} + 20 = 24 - \frac{1}{2^8}$

HTTPS://WWW.DIMAMATH.COM
Smail Eljaâfari