



I – Limite finie d'une fonction numérique en un point

1 – Limite nulle d'une fonction numérique en zéro

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble de la forme $I =]-r, r[- \{0\}$ où $r > 0$.

Si la fonction f a pour limite 0 quand x tend vers 0, on écrit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Exemple

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2x)$; $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{x-3}$

Réponse

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 2x = 0^2 + 2 \times 0 = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+2} = \sqrt{0+2} = \sqrt{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{x-3} = \frac{2 \times 0 - 1}{0 - 3} = \frac{1}{3}$

Proposition

Soient f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I =]-r, r[- \{0\}$ où $r > 0$. On a :

Si $\left\{ \begin{array}{l} (\forall x \in I), |f(x)| < |u(x)| \\ \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0 \end{array} \right.$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Exemple

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

Réponse

▲ Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

On a $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $\left| \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq 1 \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $\left| x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq |x^3|$ et comme $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

▲ Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

On a $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $\left| \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \right| \leq 1 \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $\left| x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \right| \leq |x|$ et comme $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$$

Remarques

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $\lim_{x \rightarrow 0} a x^n = 0$

2 – Limite finie d'une fonction numérique en un point

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]x_0 - r, x_0 + r[- \{x_0\}$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

Si la fonction f a pour limite un nombre réel L quand x tend vers x_0 , on note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Remarque

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall x_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*), \lim_{x \rightarrow x_0} a(x - x_0)^n = 0$$

Proposition 1

Soit f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $]x_0 - r, x_0 + r[- \{x_0\}$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. On a :

$$\text{Si } \begin{cases} (\forall x \in I), |f(x) - L| < u(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Exemple

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), |f(x) - 1| \leq (x-1)^2$

2) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

Réponse

$$1) \text{ Soit } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } f(x) - 1 = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2 - 2x + 1}{1+x^2} = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2}$$

$$\text{Donc } |f(x) - 1| = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}. \text{ Comme } x^2 \geq 0 \text{ donc } 1+x^2 \geq 1 \text{ d'où } \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{1+x^2} \leq (x-1)^2 \text{ d'où } |f(x) - 1| \leq (x-1)^2$$

2) On a montré dans la question 1) que $(\forall x \in \mathbb{R}), |f(x) - 1| \leq (x-1)^2$ et on sait que $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$

Alors $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

Proposition 2 (Limites de quelques fonctions usuelles en un point)

Soient P et Q deux fonctions polynômes et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$\star \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

$$\star \text{ Si } Q(x_0) \neq 0, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

$$\star \text{ Si } x_0 \geq 0 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$$

Exemple

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x + 1} ; \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x+2}{3x+3}} ; \lim_{x \rightarrow -3} (x-2)^2 (x^3 + 1) ;$$

3 - Limite finie d'une fonction numérique à droite et à gauche en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0, x_0 + r[$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ et $L \in \mathbb{R}$.

Si la fonction f a pour limite L quand x tend vers x_0 à droite, on écrit :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = L$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - r, x_0[$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ et $L \in \mathbb{R}$.

Si la fonction f a pour limite L quand x tend vers x_0 à gauche, on écrit :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = L$$

Proposition 1

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]x_0 - r, x_0 + r[- \{x_0\}$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

La fonction f a pour limite L quand x tend vers x_0 , si et seulement si sa limite en x_0 à droite est égale à sa limite en x_0 à gauche est égale à L .

Autrement dit : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

Exemples

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x + \sqrt{x-2} ; \lim_{x \rightarrow 3^-} 2 + \sqrt{3-x} ; \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{1+\sqrt{x+1}} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x+2}}$$

2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ dans chacun des cas suivants :

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{x+2}{1+\sqrt{x-2}} ; x \geq 2 \\ f(x) = x^2 - x + 2 ; x < 2 \end{cases} ; b) \begin{cases} f(x) = \sqrt{1-x} ; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x+1}{2x} - 3 ; x > 1 \end{cases}$$

3) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+2}{x+1} + \alpha ; x \geq 0 \\ f(x) = 1 + \beta ; x \leq 0 \end{cases}$$

Déterminer les réels α et β pour que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

Proposition 2

Soit f, u, v, w et g des fonctions définies sur un ensemble de la forme $]x_0, x_0 + r[$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

$$\star \text{ Si } \begin{cases} (\forall x \in]x_0, x_0 + r[) |f(x) - L| \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} u(x) = 0 \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

$$\star \text{ Si } \begin{cases} (\forall x \in]x_0, x_0 + r[) f(x) = g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = L \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

$$\star \text{ Si } \begin{cases} (\forall x \in]x_0, x_0 + r[) v(x) \leq f(x) \leq w(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} v(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} w(x) = L \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

Proposition 3



Soit f , u , v , w et g des fonctions définies sur un ensemble de la forme $]x_0 - r, x_0[$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

- ★ Si $\begin{cases} (\forall x \in]x_0 - r, x_0[) |f(x) - L| \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} u(x) = 0 \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$
- ★ Si $\begin{cases} (\forall x \in]x_0 - r, x_0[) f(x) = g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = L \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$
- ★ Si $\begin{cases} (\forall x \in]x_0 - r, x_0[) v(x) \leq f(x) \leq w(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} v(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} w(x) = L \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

II – Limite infinie d'une fonction numérique en un point

1 – Limite infinie d'une fonction en zéro

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $] -r, r[- \{0\}$ où $r > 0$.

- ♣ Si la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers 0, on écrit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$
- ♣ Si la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0, on écrit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$
- ♣ Si la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers 0 à droite, on écrit $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
- ♣ Si la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers 0 à gauche, on écrit $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$
- ♣ Si la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0 à droite, on écrit $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
- ♣ Si la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0 à gauche, on écrit $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

Proposition 1 (Limites infinies des fonctions usuelles en zéro)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{ x }} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty (n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2n+1}} = +\infty (n \in \mathbb{N})$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2n+1}} = -\infty (n \in \mathbb{N})$

Proposition 2

Soient f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I =] -r, r[- \{0\}$ où $r > 0$.

- ❖ Si $\begin{cases} (\forall x \in I), f(x) \geq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$
- ❖ Si $\begin{cases} (\forall x \in I), f(x) \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

Remarque

Les propriétés de la proposition 2 restent valables lorsque x tend vers 0 à droite ou à gauche.

2 – Limite infinie d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - r, x_0 + r[- \{0\}$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

- ♣ Si la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers x_0 , on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$
- ♣ Si la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers x_0 , on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$
- ♣ Si la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers x_0 à droite, on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$
- ♣ Si la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers x_0 à gauche, on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$
- ♣ Si la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers x_0 à droite, on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$
- ♣ Si la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers x_0 à gauche, on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$

Proposition 1 (Limites infinies en un point)

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{x - x_0} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{x - x_0} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{(x - x_0)^{2n+1}} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{(x - x_0)^{2n+1}} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^{2n}} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{\sqrt{x - x_0}} = +\infty$		

Proposition 2

Soient f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme

$I =]x_0 - r, x_0 + r[- \{0\}$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

- ❖ Si $\begin{cases} (\forall x \in I), f(x) \geq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$
- ❖ Si $\begin{cases} (\forall x \in I), f(x) \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

Remarque

Les propriétés de la proposition 2 restent valables lorsque x tend vers x_0 à droite ou à gauche.

Exemple

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+3}{5x}$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x-2}{4(x-2)}$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x+2}{6-2x}$

III – Limite finie d'une fonction numérique en $-\infty$ et $+\infty$ 1 – Limite nulle d'une fonction numérique en $+\infty$ et $-\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$

Si la fonction f a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$, on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, A[$ où $A \in \mathbb{R}$



Si la fonction f a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$, on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Proposition (limite nulle de quelques fonctions usuelles en $+\infty$ et $-\infty$)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$			

2 - Limite finie d'une fonction numérique en $+\infty$ et $-\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$ et $L \in \mathbb{R}$

Si la fonction f a pour limite L quand x tend vers $+\infty$, on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, A[$ où $A \in \mathbb{R}$ et $L \in \mathbb{R}$

Si la fonction f a pour limite L quand x tend vers $-\infty$, on écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$

Exemple

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{3x^2 - 4}{x^2 + 1}$.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

Proposition

★ Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $I =]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$ et

$L \in \mathbb{R}$ telles que $\begin{cases} (\forall x \in I), |f(x) - L| \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0 \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

★ Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $I =]-\infty, A[$ où $A \in \mathbb{R}$ et

$L \in \mathbb{R}$ telles que $\begin{cases} (\forall x \in I), |f(x) - L| \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0 \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$

IV - Limite infinie d'une fonction numérique en $-\infty$ et $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$.

♣ Si la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

♣ Si la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, A[$ où $A \in \mathbb{R}$.

♣ Si la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, on écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

♣ Si la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, on écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Proposition 1 (Limites infinies de quelques fonctions usuelles)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n+1} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N})$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} = -\infty \quad (n \in \mathbb{N})$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Proposition 2 (Limites infinies et ordre)

★ Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $I =]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$

telles que $\begin{cases} (\forall x \in I), f(x) \geq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

★ Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $I =]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$

telles que $\begin{cases} (\forall x \in I), f(x) \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

★ Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $I =]-\infty, A[$ où $A \in \mathbb{R}$

telles que $\begin{cases} (\forall x \in I), f(x) \geq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

★ Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $I =]-\infty, A[$ où $A \in \mathbb{R}$

telles que $\begin{cases} (\forall x \in I), f(x) \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Exemple

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 3\sin x ; \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^2 - 2\cos(x+7) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin^2(x^3 - 1) - 2x ;$$

V - Opérations sur les limites des fonctions numériques

Proposition 1 (Limites de la somme de deux fonctions)

$\lim_{x \rightarrow \square} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow \square} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \square} (f + g)(x)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Remarque

On peut mettre à la place de \square soit un nombre x_0 , $+\infty$ ou $-\infty$

Proposition 2 (Limites du produit de deux fonctions)

$\lim_{x \rightarrow \square} f(x)$	L	$L > 0$	$L < 0$	$L > 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \square} g(x)$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow \square} (f \times g)(x)$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Proposition 2 (Limites du quotient de deux fonctions)

$\lim_{x \rightarrow \square} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \square} g(x)$	$L' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$L \geq 0$	$L \geq 0$	$L \leq 0$	$L \leq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$



$\lim_{x \rightarrow \square} \left(\frac{f}{g} \right) (x)$	$\frac{L}{L'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI
---	----------------	---	---	-----------	-----------	-----------	-----------	----	----

Remarques

- ◆ Les formes indéterminées sont : $+\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$ et $\infty \times 0$
- ◆ Obtenir une forme indéterminée ne veut en aucun dire que la fonction ne possède pas de limite
- ◆ Les méthodes les plus utiles pour lever les indéterminations sont :
 - Factoriser par le terme de plus haut degré
 - Factoriser par $(x - x_0)$
 - Multiplier par l'expression conjuguée
 - Encadre une expression ...

VI – Méthodes pour calculer certaines limites**1 – Limites d'une fonction polynomiale en $+\infty$ et $-\infty$** **Proposition**

Soit f une fonction polynomiale de degré n telle que : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ où a_n, a_{n-1}, a_1 et a_0 sont des réels tels que $a_n \neq 0$. Alors on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n$$

Exemple

On a :

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^5 - 2x^4 + 7x^2 - 5x + 10 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^5 = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^7 + 2x^6 + 3x^4 - 5x^2 + 10x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^7 = +\infty$$

2 – Limites des fonctions rationnelles en $+\infty$ et $-\infty$ **Proposition**

Soit f une fonction rationnelle définie sur son domaine de définition par :

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \text{ telle que } a_n \times b_m \neq 0. \text{ Alors on a :}$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} = \begin{cases} \pm\infty ; \text{ si } n > m \\ \text{ou} \\ \frac{a_n}{b_m} ; \text{ si } n = m \\ \text{ou} \\ 0 ; \text{ si } n < m \end{cases}$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} = \begin{cases} \pm\infty ; \text{ si } n > m \\ \text{ou} \\ \frac{a_n}{b_m} ; \text{ si } n = m \\ \text{ou} \\ 0 ; \text{ si } n < m \end{cases}$$

$$\star \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{0}{0}, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)Q(x)}{(x-a)R(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{R(x)}$$

Exemple

On a :

$$\ast \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{5x^2 + 7x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{5x^2} = \frac{3}{5}$$

$$\ast \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2}{-5x^2 + 7x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{-5x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3x^2}{5} = -\infty$$

$$\ast \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2}{-5x^6 + 7x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{-5x^6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{5x^2} = 0$$

$$\ast \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x^2 + x + 1} = -\frac{1}{3}$$

[HTTPS://WWW.DIMAMATH.COM](https://www.dimamath.com)
Smail Eljaafari
[WWW.DIMAMATH.COM](https://www.dimamath.com)