



I – Limite finie d'une fonction numérique en un point

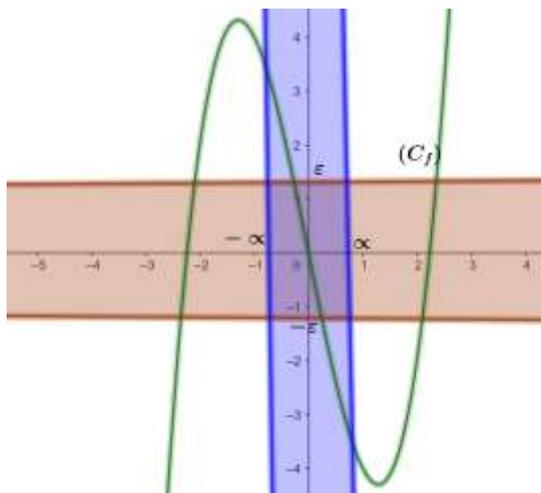
1 – Limite nulle en zéro d'une fonction numérique

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble de la forme $I =]-r, r[- \{0\}$ où $r > 0$.

On dit que la fonction f a pour limite 0 quand x tend vers 0, et on écrit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, si et

seulement si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)[0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon]$



Exemple

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2x)$; $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{x-3}$

Réponse

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 2x = 0^2 + 2 \times 0 = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+2} = \sqrt{0+2} = \sqrt{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{x-3} = \frac{2 \times 0 - 1}{0 - 3} = \frac{1}{3}$

Proposition

Soient f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I =]-r, r[- \{0\}$ où $r > 0$. On a :

$$\text{Si } \begin{cases} (\forall x \in I), |f(x)| < |u(x)| \\ \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0 \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Exemple

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

Réponse

$$\blacktriangle \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

On a $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $\left|\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq 1 \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $\left|x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq |x^3|$ et comme $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$



▲ Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

On a $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $\left|\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \leq 1 \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $\left|x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \leq |x|$ et comme $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$$

Remarques

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*), \lim_{x \rightarrow 0} a x^n = 0$$

2 - Limite finie en un point d'une fonction numérique

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]x_0 - r, x_0 + r[- \{x_0\}$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

On dit que la fonction f a pour limite un nombre réel L quand x tend vers x_0 , et on note

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L, \text{ si et seulement si : } (\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f) [0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$$

Remarque

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall x_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*), \lim_{x \rightarrow x_0} a(x - x_0)^n = 0$$

Proposition 1

Soit f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $]x_0 - r, x_0 + r[- \{x_0\}$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. On a :

$$\text{Si } \begin{cases} (\forall x \in I), |f(x) - L| < u(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Exemple

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), |f(x) - 1| \leq (x-1)^2$

2) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

Réponse

$$1) \text{ Soit } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } f(x) - 1 = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2 - 2x + 1}{1+x^2} = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2}$$

$$\text{Donc } |f(x) - 1| = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}. \text{ Comme } x^2 \geq 0 \text{ donc } 1+x^2 \geq 1 \text{ d'où } \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{1+x^2} \leq (x-1)^2 \text{ d'où } |f(x) - 1| \leq (x-1)^2$$

2) On a montré dans la question 1) que $(\forall x \in \mathbb{R}), |f(x) - 1| \leq (x-1)^2$ et on sait que $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

Proposition 2 (Limites de quelques fonctions usuelles en un point)

Soient P et Q deux fonctions polynômes et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors on a :

- ★ $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$
- ★ Si $Q(x_0) \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$
- ★ $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$
- ★ Si $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$
- ★ Si $x_0 \geq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

Exemple

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x + 1} ; \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x + 2}{3x + 3}} ; \lim_{x \rightarrow -3} (x - 2)^2 (x^3 + 1) ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos x \sin x ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x$$

3 - Limite à droite et limite à gauche en un point d'une fonction numérique**Définition 1**

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0, x_0 + r[$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ et $L \in \mathbb{R}$.

On dit que la fonction f a pour limite L quand x tend vers x_0 à **droite** si et seulement si :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f) [0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$$

On note : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = L$

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - r, x_0[$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ et $L \in \mathbb{R}$.

On dit que la fonction f a pour limite L quand x tend vers x_0 à **gauche** si et seulement si :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f) [-\alpha < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$$

On note : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = L$

Proposition 1

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]x_0 - r, x_0 + r[- \{x_0\}$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

Alors f a pour limite L quand x tend vers x_0 , si et seulement si elle admet une limite en x_0 à droite égale à sa limite en x_0 à gauche, égale à L .

Autrement dit : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

Exemples

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x + \sqrt{x - 2} ; \lim_{x \rightarrow 3^-} 2 + \sqrt{3 - x} ; \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x - 1}{1 + \sqrt{x + 1}} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{x}}{x + 2}}$$



2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ dans chacun des cas suivants :

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{x+2}{1+\sqrt{x-2}} ; x \geq 2 \\ f(x) = x^2 - x + 2 ; x < 2 \end{cases} ; b) \begin{cases} f(x) = \sin(\pi x) + \sqrt{1-x} ; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x+1}{2x} - 3 ; x > 1 \end{cases}$$

3) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+2}{x+1} + \alpha ; x \geq 0 \\ f(x) = \cos x + \beta ; x \leq 0 \end{cases}$$

Déterminer les réels α et β pour que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

Proposition 2

Soit f, u, v, w et g des fonctions définies sur un ensemble de la forme $]x_0, x_0 + r[$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

- ★ Si $\begin{cases} (\forall x \in]x_0, x_0 + r[) |f(x) - L| \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} u(x) = 0 \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$
- ★ Si $\begin{cases} (\forall x \in]x_0, x_0 + r[) f(x) = g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = L \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$
- ★ Si $\begin{cases} (\forall x \in]x_0, x_0 + r[) v(x) \leq f(x) \leq w(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} v(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} w(x) = L \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$

Proposition 3

Soit f, u, v, w et g des fonctions définies sur un ensemble de la forme $]x_0 - r, x_0[$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

- ★ Si $\begin{cases} (\forall x \in]x_0 - r, x_0[) |f(x) - L| \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} u(x) = 0 \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$
- ★ Si $\begin{cases} (\forall x \in]x_0 - r, x_0[) f(x) = g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = L \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$
- ★ Si $\begin{cases} (\forall x \in]x_0 - r, x_0[) v(x) \leq f(x) \leq w(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} v(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} w(x) = L \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

II – Limite infinie d'une fonction numérique en un point

1 – Limite infinie d'une fonction en zéro

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $] -r, r[- \{0\}$ où $r > 0$.



- ♣ On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers 0, et on note $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [|x| < \alpha \Rightarrow f(x) > A]$
- ♣ On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0, et on note $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [|x| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A]$
- ♣ On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers 0 à droite, et on note $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [0 < x < \alpha \Rightarrow f(x) > A]$
- ♣ On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers 0 à gauche, et on note $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [-\alpha < x < 0 \Rightarrow f(x) > A]$
- ♣ On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0 à droite, et on note $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [0 < x < \alpha \Rightarrow f(x) < -A]$
- ♣ On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0 à gauche, et on note $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [-\alpha < x < 0 \Rightarrow f(x) < -A]$

Proposition 1 (Limites infinies des fonctions usuelles en zéro)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{ x }} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2n+1}} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N})$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2n+1}} = -\infty \quad (n \in \mathbb{N})$

Proposition 2

Soient f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I =]-r, r[- \{0\}$ où $r > 0$.

- ❖ Si $\begin{cases} (\forall x \in I), f(x) \geq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$
- ❖ Si $\begin{cases} (\forall x \in I), f(x) \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

Remarque

Les propriétés de la proposition 2 restent valables lorsque x tend vers 0 à droite ou à gauche.

2 – Limite infinie d'une fonction en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - r, x_0 + r[- \{0\}$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.



- ♣ On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers x_0 , et on note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [|x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A]$
- ♣ On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers x_0 , et on note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [|x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A]$
- ♣ On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers x_0 à droite, et on note $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$, si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow f(x) > A]$
- ♣ On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers x_0 à gauche, et on note $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$, si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [-\alpha < x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) > A]$
- ♣ On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers x_0 à droite, et on note $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$, si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow f(x) < -A]$
- ♣ On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers x_0 à gauche, et on note $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$, si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [-\alpha < x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) < -A]$

Proposition 1 (Limites infinies en un point)

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{x - x_0} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{x - x_0} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{(x - x_0)^{2n+1}} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{(x - x_0)^{2n+1}} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^{2n}} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{\sqrt{x - x_0}} = +\infty$		

Proposition 2

Soient f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme

$I =]x_0 - r, x_0 + r[- \{0\}$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

- ❖ Si $\left\{ \begin{array}{l} (\forall x \in I), f(x) \geq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \end{array} \right.$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$
- ❖ Si $\left\{ \begin{array}{l} (\forall x \in I), f(x) \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = -\infty \end{array} \right.$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

Remarque

Les propriétés de la proposition 2 restent valables lorsque x tend vers x_0 à droite ou à gauche.

Exemple

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+3}{5x}$; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-2}{4(x-2)}$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x+2}{6-2x}$

III - Limite finie d'une fonction numérique en $-\infty$ et $+\infty$

1 - Limite nulle d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$

On dit que la fonction f a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$, et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, si et

seulement si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f), [x > B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon]$

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, A[$ où $A \in \mathbb{R}$

On dit que la fonction f a pour limite 0 quand x tend vers $-\infty$, et on note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, si et

seulement si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f), [x < -B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon]$

Proposition (limite nulle de quelques fonctions usuelles en $+\infty$ et $-\infty$)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$			

2 - Limite finie d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$ et $L \in \mathbb{R}$

On dit que la fonction f a pour limite L quand x tend vers $+\infty$, et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, si et

seulement si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f), [x > B \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, A[$ où $A \in \mathbb{R}$ et $L \in \mathbb{R}$

On dit que la fonction f a pour limite L quand x tend vers $-\infty$, et on note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, si et

seulement si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f), [x < -B \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$

Exemple

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{3x^2 - 4}{x^2 + 1}$.

Montrer en utilisant la définition de la limite que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

Proposition

★ Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $I =]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$ et

$L \in \mathbb{R}$ telles que $\begin{cases} (\forall x \in I), |f(x) - L| \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0 \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$



★ Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $I =]-\infty, A[$ où $A \in \mathbb{R}$ et

$$L \in \mathbb{R} \text{ telles que } \begin{cases} (\forall x \in I), |f(x) - L| \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0 \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

IV – Limite infinie d'une fonction numérique en $-\infty$ et $+\infty$

Définition 1

♣ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$.

On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et on note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ si et seulement si : } (\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f), [x > B \Rightarrow f(x) > A]$$

♣ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$.

On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et on note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \text{ si et seulement si : } (\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f), [x > B \Rightarrow f(x) < -A]$$

Définition 2

♣ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $] -\infty, A[$ où $A \in \mathbb{R}$.

On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, et on note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \text{ si et seulement si : } (\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f), [x < -B \Rightarrow f(x) > A]$$

♣ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $] -\infty, A[$ où $A \in \mathbb{R}$.

On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, et on note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \text{ si et seulement si : } (\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f), [x < -B \Rightarrow f(x) < -A]$$

Proposition 1 (Limites infinies de quelques fonctions usuelles)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n+1} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N})$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} = -\infty \quad (n \in \mathbb{N})$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	

Proposition 2 (Limites infinies et ordre)

★ Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $I =]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$

$$\text{telles que } \begin{cases} (\forall x \in I), f(x) \geq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

★ Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $I =]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$

$$\text{telles que } \begin{cases} (\forall x \in I), f(x) \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$



★ Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $I =]-\infty, A[$ où $A \in \mathbb{R}$

telles que $\begin{cases} (\forall x \in I), f(x) \geq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

★ Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $I =]-\infty, A[$ où $A \in \mathbb{R}$

telles que $\begin{cases} (\forall x \in I), f(x) \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Exemple

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 3\sin x ; \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^2 - 2\cos(x+7) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin^2(x^3 - 1) - 2x ;$$

V – Opérations sur les limites des fonctions numériques

Proposition 1 (Limites de la somme de deux fonctions)

$\lim_{x \rightarrow \square} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow \square} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \square} (f + g)(x)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Remarque

On peut mettre à la place de \square soit un nombre x_0 , $+\infty$ ou $-\infty$

Proposition 2 (Limites du produit de deux fonctions)

$\lim_{x \rightarrow \square} f(x)$	L	$L > 0$	$L < 0$	$L > 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \square} g(x)$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow \square} (f \times g)(x)$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Proposition 2 (Limites du quotient de deux fonctions)

$\lim_{x \rightarrow \square} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \square} g(x)$	$L' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$L \geq 0$	$L \geq 0$	$L \leq 0$	$L \leq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \square} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{L}{L'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Remarques

- ◆ Les formes indéterminées sont : $+\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$ et $\infty \times 0$
- ◆ Obtenir une forme indéterminée ne veut en aucun dire que la fonction ne possède pas de limite
- ◆ Les méthodes les plus utiles pour lever les indéterminations sont :
 - Factoriser par le terme de plus haut degré
 - Factoriser par $(x - x_0)$
 - Multiplier par l'expression conjuguée
 - Encadre une expression ...

VI – Méthodes pour calculer certaines limites



1 – Limites d'une fonction polynomiale en $+\infty$ et $-\infty$

Proposition

Soit f une fonction polynomiale de degré n telle que : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ où a_n, a_{n-1}, a_1 et a_0 sont des réels tels que $a_n \neq 0$. Alors on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n$$

Exemple

On a :

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^5 - 2x^4 + 7x^2 - 5x + 10 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^5 = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^7 + 2x^6 + 3x^4 - 5x^2 + 10x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^7 = +\infty$$

2 – Limites des fonctions rationnelles en $+\infty$ et $-\infty$

Proposition

Soit f une fonction rationnelle définie sur son domaine de définition par :

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \text{ telle que } a_n \times b_m \neq 0. \text{ Alors on a :}$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} = \begin{cases} \pm\infty ; \text{ si } n > m \\ \text{ou} \\ \frac{a_n}{b_m} ; \text{ si } n = m \\ \text{ou} \\ 0 ; \text{ si } n < m \end{cases}$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} = \begin{cases} \pm\infty ; \text{ si } n > m \\ \text{ou} \\ \frac{a_n}{b_m} ; \text{ si } n = m \\ \text{ou} \\ 0 ; \text{ si } n < m \end{cases}$$

$$* \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{0}{0}, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)Q(x)}{(x-a)R(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{R(x)}$$

Exemple

On a :

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{5x^2 + 7x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{5x^2} = \frac{3}{5}$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2}{-5x^2 + 7x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{-5x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3x^2}{5} = -\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2}{-5x^6 + 7x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{-5x^6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{5x^2} = 0$$



$$* \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x^2 + x + 1} = -\frac{1}{3}$$

3 – Limites des fonctions trigonométriques

Proposition

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{bx} = \frac{a}{b} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{bx^2} = \frac{a^2}{2b}$$

