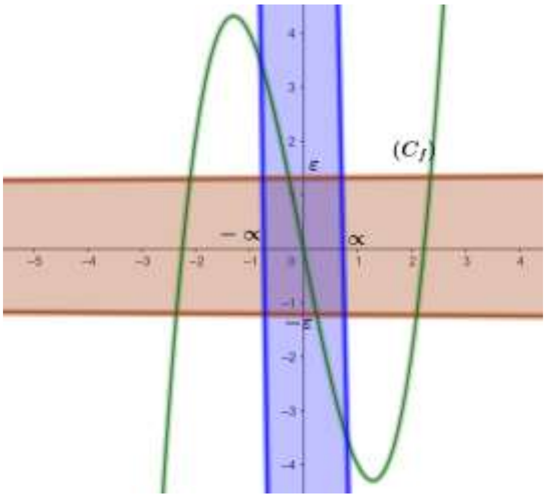
I – Limite finie d'une fonction numérique en un point

1 – Limite nulle en zéro d'une fonction numérique

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble de la forme $I =]-r,r[- \{0\}$ *où* $r > 0$.
On dit que la fonction f a pour limite 0 quand x tend vers 0, et on écrit $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, si et seulement si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)[0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon]$



Exemple

Montrer en utilisant la définition que $\lim_{x\to 0}\left(x^2+2x\right) = 0$

Réponse

Considérons la fonction f définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = x^2 + 2x$

Montrons que : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)[0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon]$.

Soit $\varepsilon > 0$ on a $|f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2+2x| < \varepsilon \Leftrightarrow |x+2||x| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \dfrac{\varepsilon}{|x+2|} < \varepsilon$ (car $-1 < x < 1$)

Il suffit de prendre $\alpha = \min(1,\varepsilon)$ et on

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha = \min(1,\varepsilon) > 0)(\forall x \in D_f)[0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon]$

Proposition

Soient f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I =]-r,r[- \{0\}$ *où* $r > 0$. On a :

$$\text{Si } \begin{cases} (\forall x \in I), |f(x)| < |u(x)| \\ \lim_{x\to 0} u(x) = 0 \end{cases} \text{ alors } \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Exemple

Calculer $\lim_{x\to 0} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ *et* $\lim_{x\to 0} x\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

Réponse

- Calculons $\lim_{x\to 0} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

On a $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right),\left|\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right|\leq 1\Rightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right),\left|x^3\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right|\leq\left|x^3\right|$ et comme $\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$, alors $\lim\limits_{x\to 0}x^3\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$

- Calculons $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

On a $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right),\left|\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|\leq 1\Rightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right),\left|x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|\leq\left|x\right|$ et comme $\lim\limits_{x\to 0}x=0$, alors $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)=0$

Remarques

$\left(\forall a\in\mathbb{R}\right)\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right),\ \lim\limits_{x\to 0}a\,x^n=0$

2 – Limite finie en un point d'une fonction numérique

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $\left]x_0-r,x_0+r\right[-\left\{x_0\right\}$ où $x_0\in\mathbb{R}$ et $r>0$.

On dit que la fonction f a pour limite un nombre réel L quand x tend vers x_0, et on note

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\mathrm{L}$, si et seulement si : $\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists\alpha>0\right)\left(\forall x\in D_f\right)\left[0<\left|x-x_0\right|<\alpha\Rightarrow\left|f(x)-L\right|<\varepsilon\right]$

Remarque

$\left(\forall a\in\mathbb{R}\right)\left(\forall x_0\in\mathbb{R}\right)\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right),\ \lim\limits_{x\to x_0}a\left(x-x_0\right)^n=0$

Proposition 1

Soit f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $\left]x_0-r,x_0+r\right[-\left\{x_0\right\}$ où $x_0\in\mathbb{R}$ et $r>0$ et $L\in\mathbb{R}$. On a :

$$\text{Si }\begin{cases}\left(\forall x\in I\right),\left|f(x)-L\right|<u(x)\\ \lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0\end{cases}\quad\text{alors}\quad\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$$

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$

1) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right),\left|f(x)-1\right|\leq\left(x-1\right)^2$

2) En déduire que $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$

Réponse

1) Soit $x\in\mathbb{R}$, on a $f(x)-1=\dfrac{2x}{1+x^2}-1=-\dfrac{x^2-2x+1}{1+x^2}=-\dfrac{\left(x-1\right)^2}{1+x^2}$

Donc $\left|f(x)-1\right|=\dfrac{\left(x-1\right)^2}{1+x^2}$. Comme $x^2\geq 0$ donc $1+x^2\geq 1$ d'où $\dfrac{1}{1+x^2}\leq 1$

$$\frac{(x-1)^2}{1+x^2} \leq (x-1)^2 \quad d'où \quad |f(x)-1| \leq (x-1)^2$$

2) On a montré dans la question 1) que $(\forall x \in \mathbb{R}), |f(x)-1| \leq (x-1)^2$ et on sait que $\lim\limits_{x \to 1}(x-1)^2 = 0$

Alors $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

Proposition 2 (Limites de quelques fonctions usuelles en un point)

Soient P et Q deux fonctions polynômes et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors on a :

- ★ $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$
- ★ Si $Q(x_0) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$
- ★ $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 \quad et \quad \lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$
- ★ Si $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0$
- ★ Si $x_0 \geq 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

Exemple

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x+1} \; ; \; \lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x+2}{3x+3}} \; ; \; \lim_{x \to -3} (x-2)^2 (x^3+1) \; ; \; \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos x \sin x \; ; \; \lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \tan x$$

3 – Limite à droite et limite à gauche en un point d'une fonction numérique

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0, x_0 + r[$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ et $L \in \mathbb{R}$.

On dit que la fonction f a pour limite L quand x tend vers x_0 à droite si et seulement si :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)[0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$$

On note : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L \quad ou \quad \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = L$

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - r, x_0[$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ et $L \in \mathbb{R}$.

On dit que la fonction f a pour limite L quand x tend vers x_0 à gauche si et seulement si :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)[-\alpha < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$$

On note : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L \quad ou \quad \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = L$

Proposition 1

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]x_0 - r, x_0 + r[- \{x_0\}$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ *et* $r > 0$.

La fonction f a pour limite L quand x tend vers x_0, si et seulement si elle admet une limite en x_0 à droite égale à sa limite en x_0 à gauche, égale à L.

Autrement dit : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$

Exemples

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 2^+} x+\sqrt{x-2} \;;\; \lim_{x\to 3^-} 2+\sqrt{3-x} \;;\; \lim_{x\to -1^+} \frac{x-1}{1+\sqrt{x+1}} \;;\; \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x+2}}$$

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ dans chacun des cas suivants :

$$a)\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+2}{1+\sqrt{x-2}} \;;\; x\geq 2 \\ f(x)=x^2-x+2 \;;\; x<2 \end{cases} \;;\; b)\begin{cases} f(x)=\sin(\pi x)+\sqrt{1-x} \;;\; x\leq 1 \\ f(x)=\dfrac{x+1}{2x}-3 \;;\; x>1 \end{cases}$$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}+\alpha \;;\; x\geq 0 \\ f(x)=\cos x+\beta \;;\; x\leq 0 \end{cases}$

Déterminer les réels α et β pour que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$

Proposition 2

Soit f , u, v, w et g des fonctions définies sur un ensemble de la forme $]x_0, x_0+r[$ où $x_0\in\mathbb{R}$ *et* $r>0$ et $L\in\mathbb{R}$.

★ Si $\begin{cases} (\forall x\in]x_0,x_0+r[);|f(x)-L|\leq u(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} u(x)=0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$

★ Si $\begin{cases} (\forall x\in]x_0,x_0+r[)\;;\; f(x)=g(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=L \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$

★ Si $\begin{cases} (\forall x\in]x_0,x_0+r[)\;;\; v(x)\leq f(x)\leq w(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} v(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} w(x)=L \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$

Proposition 3

Soit f , u, v, w et g des fonctions définies sur un ensemble de la forme $]x_0-r, x_0[$ où $x_0\in\mathbb{R}$ *et* $r>0$ et $L\in\mathbb{R}$.

★ Si $\begin{cases} (\forall x\in]x_0-r,x_0[);|f(x)-L|\leq u(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} u(x)=0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$

★ Si $\begin{cases} (\forall x\in]x_0-r,x_0[)\;;\; f(x)=g(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)=L \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$

★ Si $\begin{cases} (\forall x \in]x_0 - r, x_0[);\ v(x) \leq f(x) \leq w(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} v(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} w(x) = L \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$

II – Limite infinie d'une fonction numérique en un point

1 – Limite infinie d'une fonction en zéro

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-r,r[-\{0\}$ où $r > 0$.

- On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers 0, et on note $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [|x| < \alpha \Rightarrow f(x) > A]$
- On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0, et on note $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$, si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [|x| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A]$
- On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers 0 à droite, et on note $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [0 < x < \alpha \Rightarrow f(x) > A]$
- On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers 0 à gauche, et on note $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$, si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [-\alpha < x < 0 \Rightarrow f(x) > A]$
- On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0 à droite, et on note $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [0 < x < \alpha \Rightarrow f(x) < -A]$
- On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0 à gauche, et on note $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [-\alpha < x < 0 \Rightarrow f(x) < -A]$

Proposition 1 (Limites infinies des fonctions usuelles en zéro)

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{\lvert x \rvert}} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{2n+1}} = +\infty\ (n \in \mathbb{N})$	$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^{2n+1}} = -\infty\ (n \in \mathbb{N})$

Proposition 2

Soient f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I =]-r,r[-\{0\}$ où $r > 0$.

❖ Si $\begin{cases} (\forall x \in I),\ f(x) \geq u(x) \\ \lim\limits_{x \to 0} u(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

❖ Si $\begin{cases} (\forall x \in I),\ f(x) \leq u(x) \\ \lim\limits_{x \to 0} u(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

Remarque

Les propriétés de la proposition 2 restent valables lorsque x tend vers 0 à droite ou à gauche.

2 – Limite infinie d'une fonction en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - r, x_0 + r[-\{0\}$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

- On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers x_0, et on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [|x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A]$
- On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers x_0, et on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si et seulement si : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [|x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A]$
- On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers x_0 à droite, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, si et seulement si :
$$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow f(x) > A]$$
- On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers x_0 à gauche, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$, si et seulement si :
$$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [-\alpha < x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) > A]$$
- On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers x_0 à droite, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$, si et seulement si :
$$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow f(x) < -A]$$
- On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers x_0 à gauche, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$, si et seulement si :
$$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f), [-\alpha < x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) < -A]$$

Proposition 1 (Limites infinies en un point)

$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{1}{x - x_0} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{1}{x - x_0} = -\infty$	$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{1}{(x - x_0)^{2n+1}} = -\infty$	$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{1}{(x - x_0)^{2n+1}} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{(x - x_0)^{2n}} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x - x_0}} = +\infty$		

Proposition 2

Soient f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme

$I =]x_0 - r, x_0 + r[-\{0\}$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

- Si $\begin{cases} (\forall x \in I),\ f(x) \geq u(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

❖ Si $\begin{cases} (\forall x \in I),\ f(x) \leq u(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Remarque

Les propriétés de la proposition 2 restent valables lorsque x tend vers x_0 à droite ou à gauche.

Exemples

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x+3}{(x-2)^2} \quad ; \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2+5}{1-x} \quad ; \quad \lim_{x \to 3^-} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2-2x-3}$$

III – Limite finie d'une fonction numérique en $-\infty$ et $+\infty$

1 – Limite nulle d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A,+\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$

On dit que la fonction f a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, si et seulement si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f),\ [x > B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon]$

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty,A[$ où $A \in \mathbb{R}$

On dit que la fonction f a pour limite 0 quand x tend vers $-\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, si et seulement si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f),\ [x < -B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon]$

Proposition (limite nulle de quelques fonctions usuelles en $+\infty$ et $-\infty$)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0\ (n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$			

2 – Limite finie d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A,+\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$ et $L \in \mathbb{R}$

On dit que la fonction f a pour limite L quand x tend vers $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, si et seulement si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f),\ [x > B \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty,A[$ où $A \in \mathbb{R}$ et $L \in \mathbb{R}$

On dit que la fonction f a pour limite 0 quand x tend vers $-\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$, si et seulement si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f),\ [x < -B \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3x^2-4}{x^2+1}$.

Montrer en utilisant la définition de la limite que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

Proposition

★ Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $\mathrm{I}=]\mathrm{A},+\infty[$ où $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$ et $\mathrm{L}\in\mathbb{R}$ telles que $\begin{cases}(\forall x\in I),\ |f(x)-\mathrm{L}|\le u(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=0\end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\mathrm{L}$

★ Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $\mathrm{I}=]-\infty,\mathrm{A}[$ où $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$ et $\mathrm{L}\in\mathbb{R}$ telles que $\begin{cases}(\forall x\in I),\ |f(x)-\mathrm{L}|\le u(x)\\ \lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=0\end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\mathrm{L}$

IV – Limite infinie d'une fonction numérique en $-\infty$ et $+\infty$

Définition 1

♣ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]\mathrm{A},+\infty[$ où $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$.
On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et on note
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, si et seulement si : $(\forall A>0)(\exists B>0)(\forall x\in D_f),\ [x>B\Rightarrow f(x)>A]$

♣ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]\mathrm{A},+\infty[$ où $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$.
On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et on note
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, si et seulement si : $(\forall A>0)(\exists B>0)(\forall x\in D_f),\ [x>B\Rightarrow f(x)<-A]$

Définition 2

♣ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty,\mathrm{A}[$ où $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$.
On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, et on note
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, si et seulement si : $(\forall A>0)(\exists B>0)(\forall x\in D_f),\ [x<-B\Rightarrow f(x)>A]$

♣ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty,\mathrm{A}[$ où $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$.
On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, et on note
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, si et seulement si : $(\forall A>0)(\exists B>0)(\forall x\in D_f),\ [x<-B\Rightarrow f(x)<-A]$

Proposition 1 (Limites infinies de quelques fonctions usuelles)

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2n}=+\infty\quad(n\in\mathbb{N}^*)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n}=+\infty\quad(n\in\mathbb{N}^*)$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2n+1}=+\infty\quad(n\in\mathbb{N})$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n+1}=-\infty\quad(n\in\mathbb{N})$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$	

Proposition 2 (Limites infinies et ordre)

★ Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $I =]A,+\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$

telles que $\begin{cases} (\forall x \in I),\ f(x) \geq u(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

★ Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $I =]A,+\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$

telles que $\begin{cases} (\forall x \in I),\ f(x) \leq u(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

★ Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $I =]-\infty,A[$ où $A \in \mathbb{R}$

telles que $\begin{cases} (\forall x \in I),\ f(x) \geq u(x) \\ \lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

★ Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $I =]-\infty,A[$ où $A \in \mathbb{R}$

telles que $\begin{cases} (\forall x \in I),\ f(x) \leq u(x) \\ \lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Exemple

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x + 3\sin x$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2 - 2\cos(x+7)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin^2(x^3-1) - 2x$;

V – Opérations sur les limites des fonctions numériques

Proposition 1 (Limites de la somme de deux fonctions)

$\lim\limits_{x\to\square} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\square} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\square} (f+g)(x)$	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Remarque

On peut mettre à la place de $\square$ soit un nombre x_0, $+\infty$ ou $-\infty$

Proposition 2 (Limites du produit de deux fonctions)

$\lim\limits_{x\to\square} f(x)$	L	L > 0	L < 0	L > 0	L < 0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\square} g(x)$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\square} (f\times g)(x)$	L × L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Proposition 2 (Limites du quotient de deux fonctions)

$\lim\limits_{x\to\square} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\square} g(x)$	L' ≠ 0	$+\infty$	$-\infty$	L ≥ 0	L ≥ 0	L ≤ 0	L ≤ 0	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\square} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{L}{L'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Remarques

- Les formes indéterminées sont : $+\infty-\infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$ et $\infty\times 0$
- Obtenir une forme indéterminée ne veut en aucun dire que la fonction ne possède pas de limite
- Les méthodes les plus utiles pour lever les indéterminations sont :
  - Factoriser par le terme de plus haut degré
  - Factoriser par $(x - x_0)$
  - Multiplier par l'expression conjuguée
  - Encadrer une expression ...

VI – Méthodes pour calculer certaines limites

1 – Limites d'une fonction polynomiale en $+\infty$ et $-\infty$

Proposition

Soit f une fonction polynomiale de degré n telle que : $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ où a_n, a_{n-1}, a_1 et a_0 sont des réels tels que $a_n\neq 0$. Alors on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} a_nx^n \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} a_nx^n$$

Exemple

On a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^5-2x^4+7x^2-5x+10=\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^5=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^7+2x^6+3x^4-5x^2+10x=\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^7=+\infty$

2 – Limites des fonctions rationnelles en $+\infty$ et $-\infty$

Proposition

Soit f une fonction rationnelle définie sur son domaine de définition par :

$f(x)=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$ telle que $a_n\times b_m\neq 0$. Alors on a :

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}=\begin{cases}\pm\infty \ ; \ si\ n>m\\ ou\\ \dfrac{a_n}{b_m} \ ; \ si\ n=m\\ ou\\ 0 \ ; \ si\ n<m\end{cases}$$
- $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}=\begin{cases}\pm\infty \ ; \ si\ n>m\\ ou\\ \dfrac{a_n}{b_m} \ ; \ si\ n=m\\ ou\\ 0 \ ; \ si\ n<m\end{cases}$$
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)="\frac{0}{0}"$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)Q(x)}{(x-a)R(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{Q(x)}{R(x)}$

Exemple

On a :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x+2}{5x^2+7x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2}{5x^2}=\dfrac{3}{5}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4+5x^3-x^2+2}{-5x^2+7x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4}{-5x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{3x^2}{5}=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4+5x^3-x^2+2}{-5x^6+7x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4}{-5x^6}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{3}{5x^2}=0$
- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to-}\dfrac{x-2}{x^2+x+1}=-\dfrac{1}{3}$

3 – Limites des fonctions trigonométriques

Proposition

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

Exemple

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(ax)}{bx}=\dfrac{a}{b}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(ax)}{bx}=\dfrac{a}{b}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(ax)}{bx^2}=\dfrac{a^2}{2b}$