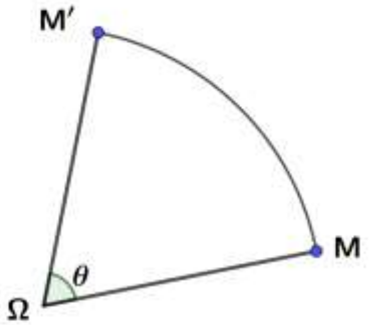
1 – Rotation et rotation réciproque

Définition

Dans le plan orienté positivement, on considère un point Ω et un nombre réel θ.

On appelle **rotation de centre** Ω **et d'angle** θ, la transformation du plan qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :

- ★ Si $M = \Omega$ alors $M' = \Omega$ (on dit que le centre Ω de la rotation est invariant par la rotation)
- ★ Si $M \neq \Omega$ alors on a : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$



Remarques

- ♦ La rotation de centre Ω et d'angle θ est notée $R(\Omega,\theta)$ ou simplement R
- ♦ La rotation $R(O,\pi)$ est la symétrie centrale de centre O
- ♦ Si $\theta \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ alors le centre Ω de la rotation est l'unique point invariant par cette rotation
- ♦ Pour tout point M du plan tel que $M \neq \Omega$ et $R(M) = M'$, on a :
  - Le point M' appartient au cercle de centre Ω et de rayon ΩM
  - La médiatrice du segment $[MM']$ passe par Ω
  - Le triangle $\Omega MM'$ est isocèle au sommet Ω.

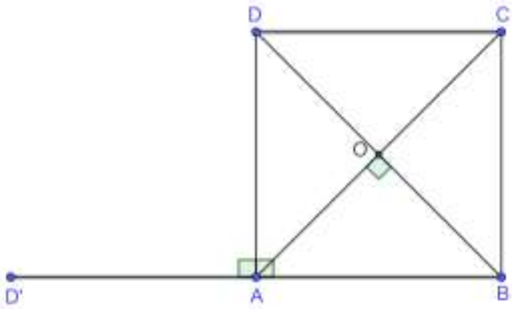
Exemple

$ABCD$ est un carré de sens direct et de centre O. Soit R_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et R_O la rotation de centre O et d'angle α.

1) Déterminer $R_A(A), R_A(B)$ *et* $R_A(D)$

2) Comment choisir α pour que $R_O(A) = B$? puis $R_O(A) = C$?

Réponse



1) $R_A(A) = A$

$R_A(B) = D$

$R_A(D) = D'$ où D' est le symétrique

De B par rapport à A

2) $R_O(A) = B \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $\alpha \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$$R_O(A)=C \Leftrightarrow \begin{cases} OA=OC \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\pi\,[2\pi] \end{cases} \quad \text{donc} \quad \alpha\equiv\pi[2\pi]$$

Proposition

La rotation $R(\Omega,\theta)$ est une bijection du plan dans lui-même et sa bijection réciproque est la rotation $R(\Omega,-\theta)$. De plus on a :

$$R(\Omega,\theta)(M)=M' \Leftrightarrow R(\Omega,-\theta)(M')=M$$

2 – Propriétés des rotations

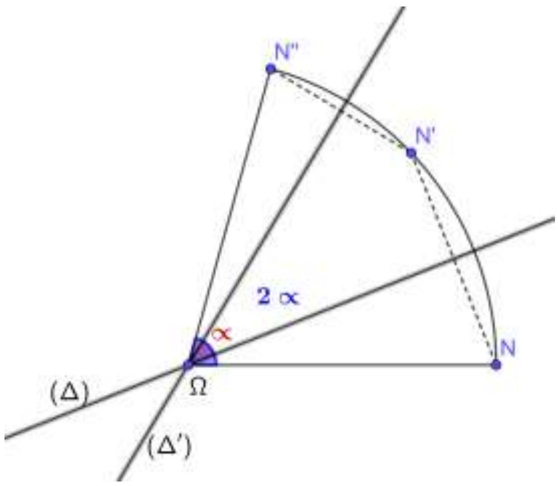
a – Décomposition d'une rotation

Proposition 1

Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et soit Ω un point du plan et (Δ) une droite passant par le point Ω et (Δ') l'image de (Δ) par la rotation de centre Ω et d'angle α . Alors :

La composée $\left(S_{(\Delta')}\circ S_{(\Delta)}\right)$ est une rotation de centre Ω et d'angle 2α

On a $S_{(\Delta')}\circ S_{(\Delta)}=R(\Omega,2\alpha$



Proposition 2

Toute rotation $R(\Omega,\theta)$ peut se décomposer comme suit :

- ★ $R(\Omega,\theta)=S_{(\Delta')}\circ S_{(\Delta)}$ où (Δ') est l'image de (Δ) par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\theta}{2}$
- ★ $S_{(\Delta)}\circ S_{(\Delta')}=R(\Omega,\theta)$ où (Δ') est l'image de (Δ) par la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\theta}{2}$

b – Propriétés d'une rotation

Propriété 1 (Conservation des distances)

La rotation conserve les distances

Autrement dit : Si $\begin{cases} R(A)=A' \\ R(B)=B' \end{cases}$ alors $A'B'=AB$

Remarque

La rotation est une isométrie

Exemple

$ABCD$ est un carré tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1) Construire M, N et P les images respectives de B, C et D par R

2) Montrer que le triangle MNP est isocèle

Réponse

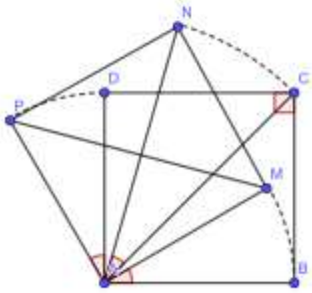
On a : $R(B)=M$, $R(C)=N$ et $R(D)=P$

Et $CD=CB$

Puisque la rotation conserve les distances, alors

$NP=NM$

Donc le triangle MNP est isocèle en N



Propriété 2 (Propriété fondamentale)

Soit R une rotation d'angle θ. Alors :

$$\begin{cases} R(A)=A' \\ R(B)=B' \end{cases} \text{ alors } \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right)\equiv\theta[2\pi]$$

Remarque

Cette propriété permet de déterminer l'angle de la rotation lorsqu'on connait les images de deux points du plan

Propriété 3 (Conservation des mesures des angles)

Soit R une rotation. La rotation R conserve les mesures des angles.

Autrement dit : Si $\begin{cases} R(A)=A' \\ R(B)=B' \\ R(C)=C' \\ R(D)=D' \end{cases}$ alors $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}\right)[2\pi]$

Propriété 4 (conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs)

La rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

Autrement dit : Si $\begin{cases} R(A)=A' \\ R(B)=B' \\ R(C)=C' \\ \overrightarrow{AC}=k.\overrightarrow{AB}\ (k\in\mathbb{R}) \end{cases}$ alors $\overrightarrow{A'C'}=k.\overrightarrow{AB}$

Remarques

- Si A, B et C sont trois points alignés alors leurs images respectives A', B' et C' par une rotation sont aussi alignés
- Si $(AB)\parallel(CD)$ alors $(A'B')\parallel(C'D')$ où $R(A)=A'$, $R(B)=B'$, $R(C)=C'$ et $R(D)=D'$

Propriété 5 (Conservation des barycentres)

Soit R une rotation et soit G le barycentres d'une famille de points pondérés $(A_i,\alpha_i)_{1\le i\le n}$ et $R(A_i)=A_i'$. Alors $G'=R(G)$ est le barycentres de la famille de points pondérés $(A_i',\alpha_i)_{1\le i\le n}$

Remarques

- La rotation conserve aussi le milieu de segment

Autrement dit : Si $\begin{cases} R(A)=A' \\ R(B)=B' \\ I \text{ milieu de } [AB] \\ R(I)=I' \end{cases}$ alors I' est le milieu de $[A'B']$

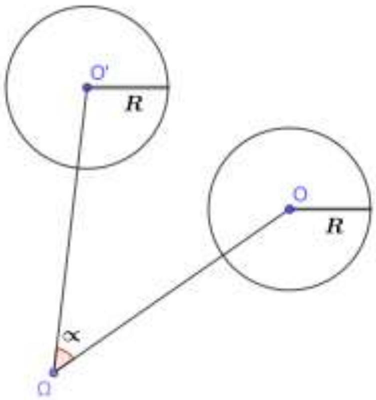
- La rotation conserve le centre de gravité d'un triangle
  Autrement dit : Si

$$\begin{cases} R(A)=A' \\ R(B)=B' \\ R(C)=C' \\ G \text{ centre de gravité du triangle } ABC \\ R(G)=G' \end{cases}$$ alors G' est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$

3 – Images de certaines figures par une rotation

Proposition 1

L'image d'un cercle de centre O par une rotation est un cercle de même rayon et de centre O' tel que $O' = R(O)$



Proposition 2

1) L'image d'une droite par une rotation est une droite.
Autrement dit : $R((AB))=(A'B')$ où $R(A)=A'$ *et* $R(B)=B'$

2) L'image d'un segment par une rotation est un segment.
Autrement dit : $R([AB])=[A'B']$ où $R(A)=A'$ *et* $R(B)=B'$

3) L'image d'une demi-droite par une rotation est une demi-droite.
Autrement dit : $R([AB))=[A'B')$ où $R(A)=A'$ *et* $R(B)=B'$

Proposition 3

1) La rotation conserve le parallélisme.

Autrement dit : Si $\begin{cases} R((\Delta))=(\Delta') \\ R((D))=(D') \\ (\Delta)\parallel(D) \end{cases}$ *alors* $(\Delta')\parallel(D')$

2) La rotation conserve l'orthogonalité.

Autrement dit : $\begin{cases} R\left(\left(\Delta\right)\right)=\left(\Delta'\right) \\ R\left(\left(D\right)\right)=\left(D'\right) \\ \left(\Delta\right)\perp\left(D\right) \end{cases}$ $\quad alors \quad$ $\left(\Delta'\right)\perp\left(D'\right)$

3) L'image de l'intersection de deux figures par une rotation est l'intersection des images de ces deux figures par cette rotation

4 – Composée de deux rotations

Proposition

Soient $R_1\left(O_1,\theta_1\right)$ et $R_2\left(O_2,\theta_2\right)$ deux rotations telles que $\theta_1 \neq 2k\pi$ et $\theta_2 \neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

- Si $O_1 = O_2$ alors $R_1 \circ R_2$ est une rotation de centre O_1 et d'angle $\theta_1+\theta_2$, de plus dans ce cas on a $R_1\circ R_2 = R_2\circ R_1$
- Si $O_1 \neq O_2$ et $\theta_1+\theta_2 \neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ alors $R_1\circ R_2$ est une rotation d'angle $\theta_1+\theta_2$
- Si $O_1 \neq O_2$ et $\theta_1+\theta_2 = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ alors $R_1\circ R_2$ est une translation

Exemples

Soit EFG un triangle. Déterminer la nature de chacune des applications suivantes :

- $R\left(G,\frac{\pi}{3}\right)\circ R\left(G,-\frac{\pi}{3}\right)$
- $R\left(A,\frac{\pi}{3}\right)\circ R\left(B,-\frac{\pi}{3}\right)$
- $R\left(C,\frac{\pi}{3}\right)\circ R\left(B,\frac{\pi}{3}\right)$

Réponses

- $R\left(G,\frac{\pi}{3}\right)\circ R\left(G,-\frac{\pi}{3}\right)$=Id car $R\left(G,\frac{\pi}{3}\right)$ est une bijection de bijection réciproque $R\left(G,-\frac{\pi}{3}\right)$
- $R\left(A,\frac{\pi}{3}\right)\circ R\left(B,-\frac{\pi}{3}\right)$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$
- $R\left(C,\frac{\pi}{3}\right)\circ R\left(B,\frac{\pi}{3}\right)$ est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$