I – Comparaison des nombres réels

Proposition

Soient a et b deux nombres réels.

- ★ $a<b$ si et seulement si $a-b<0$
- ★ $a\le b$ si et seulement si $a-b\le 0$
- ★ $a>b$ si et seulement si $a-b>0$
- ★ $a\ge b$ si et seulement si $a-b\ge 0$
- ★ $a=b$ si et seulement si $a-b=0$

Remarque

Pour comparer deux nombres réels, on étudie le signe de leur différence

Exemple

Comparer les nombres suivants :

$\frac{4}{5}$ et $\frac{8}{9}$; $-\frac{6}{7}$ et $-\frac{2}{3}$; $\frac{101}{100}$ *et* $\frac{21}{20}$

Réponse

- On a $\frac{4}{5}-\frac{8}{9}=\frac{36}{45}-\frac{40}{45}=-\frac{4}{45}$. Puisque $-\frac{4}{45}<0$ alors $\frac{4}{5}<\frac{8}{9}$
- On a $-\frac{6}{7}+\frac{2}{3}=-\frac{18}{21}+\frac{14}{21}=-\frac{4}{21}$. Puisque $-\frac{4}{21}<0$ alors $-\frac{6}{7}<-\frac{2}{3}$
- On a $\frac{21}{20}-\frac{101}{100}=\frac{2100}{2000}-\frac{2020}{2000}=\frac{80}{2000}=\frac{1}{25}$. Puisque $\frac{1}{25}>0$, alors $\frac{21}{20}>\frac{101}{100}$

II – Ordre et opérations

1 – Ordre et addition – Ordre et soustraction

Règle 1

Soient a, b et c trois nombres réels.

- ★ Si $a<b$ alors $a+c<b+c$
- ★ Si $a\le b$ alors $a+c\le b+c$
- ★ Si $a<b$ alors $a-c<b-c$
- ★ Si $a\le b$ alors $a-c\le b-c$

Exemples

1) Comparer : $5+\sqrt{11}$ *et* $7+\sqrt{11}$; $-3+\pi$ *et* $-4+\pi$

2) Si $x\le 5$, comparer $x-12$ *et* -7

Réponses

1) On a $5<7$, alors $5+\sqrt{11}<7+\sqrt{11}$

On a $-3>-4$, alors $-3+\pi>-4+\pi$

2) On a $x\le 5$, alors $x-12\le 5-12$. Donc $x-12\le -7$

Règle 2

Soient a, b, c et d quatre nombres réels.

1) Si $\begin{cases}a<b\\ c<d\end{cases}$, alors $a+c<b+d$; 2) Si $\begin{cases}a\le b\\ c\le d\end{cases}$, alors $a+c\le b+d$

3) Si $\begin{cases}a<b\\ c<d\end{cases}$, alors $a-d\le b-c$; 4) Si $\begin{cases}a\le b\\ c\le d\end{cases}$, alors $a-d\le b-c$

Exemples

HTTPS://WWW.DIMAMATH.COM Smail El jaâfari

1) Sachant que $x \leq 2$ et $5 \geq y$, montrer que $x + y \leq 7$

2) Sachant que $\pi < \frac{10}{3}$ et $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$, montrer que $\pi + \sqrt{2} < \frac{29}{6}$

Réponses

1) On a $x \leq 2$ et $5 \geq y$, donc $\begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq 5 \end{cases}$, alors $x + y \leq 2 + 5$. D'où $x + y \leq 7$

2) On a $\pi < \frac{10}{3}$ et $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$, donc $\begin{cases} \pi < \frac{10}{3} \\ \sqrt{2} < \frac{3}{2} \end{cases}$, alors $\pi + \sqrt{2} < \frac{10}{3} + \frac{3}{2}$. D'où $\pi + \sqrt{2} < \frac{29}{6}$

2 – Ordre et multiplication – Ordre et division

Règle 3

Soient a, b et c trois nombres réels.

1) Si $\begin{cases} a < b \\ c > 0 \end{cases}$, alors $a \times c < b \times c$; 2) Si $\begin{cases} a \leq b \\ c > 0 \end{cases}$, alors $a \times c < b \times c$

3) Si $\begin{cases} a < b \\ c < 0 \end{cases}$, alors $a \times c > b \times c$; 4) Si $\begin{cases} a \leq b \\ c < 0 \end{cases}$, alors $a \times c \geq b \times c$

Cas particulier

Si $a < b$ alors $-b < -a$

Exemple

Sachant que $x \leq \sqrt{2}$, comparer $3x$ et $3\sqrt{2}$ puis $-5x$ et $-5\sqrt{2}$

Réponse

On a $\begin{cases} x \leq \sqrt{2} \\ 3 > 0 \end{cases}$, alors $3x \leq 3\sqrt{2}$

Et on a $\begin{cases} x \leq \sqrt{2} \\ -5 < 0 \end{cases}$, alors $-5x \geq -5\sqrt{2}$

Règle 4

Soient a, b, c et d quatre nombres réels positifs.

1) Si $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases}$, alors $a \times c < b \times d$; 2) Si $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases}$; alors $a \times c \leq b \times d$

Règle 5

Soient a et b deux nombres réels non nuls de même signe.

1) Si $a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; 2) Si $a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

3 – Ordre et carré – Ordre et racine carrée

Règle 6

Soient a et b deux nombres réels positifs.

1) Si $a < b$, alors $a^2 < b^2$; 2) Si $a^2 < b^2$, alors $a < b$

HTTPS://WWW.DIMAMATH.COM
Smail El jaâfari

3) Si $a<b$, alors $\sqrt{a}<\sqrt{b}$; 4) Si $\sqrt{a}<\sqrt{b}$, alors $a<b$

III – Encadrement

1 – Définition

Définition
Encadrer un nombre réel c'est trouver deux valeurs entre lesquelles il est compris

Exemple

- $1,41<\sqrt{2}<1,42$ est un encadrement de $\sqrt{2}$
- $3,141<\pi<3,142$ est un encadrement de π

2 – Encadrement et addition – Encadrement et soustraction

Règle 7
Soient a, b, c, d, x et y des nombres réels.

1) Si $\begin{cases} a\le x\le b \\ c\le y\le d \end{cases}$, alors $a+c\le x+y\le b+d$

2) $\begin{cases} a\le x\le b \\ c\le y\le d \end{cases}$, alors $a-d\le x-y\le b-c$

3) Si $a\le x\le b$, $alors\ -b\le -x\le -a$

Exemples
Soient x et y deux nombres réels tels que $2\le x\le 5$ et $3\le y\le 7$. Donner un encadrement des nombres suivants : $x+y+2,\ x-y+10,\ y-x-6$

Réponse
On a $2\le x\le 5$ et $3\le y\le 7$, donc $5\le x+y\le 12$ et $-5\le x-y\le 2$ et $-2\le y-x\le 5$ Alors
$7\le x+y+2\le 14$ et $5\le x-y+10\le 12$ et $-8\le y-x-6\le -1$

3 –Encadement et multiplication – Encadrement et division

Règle 8
Soient a, b, c, d, x et y des nombres réels positifs.

1) Si $\begin{cases} a\le x\le b \\ c\le y\le d \end{cases}$, alors $a\times c\le x\times y\le b\times d$

2) Si $a\le x\le b$, alors $\frac{1}{b}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{a}$

3) Si $\begin{cases} a\le x\le b \\ 0<c\le y\le d \end{cases}$, alors $\frac{a}{d}\le\frac{x}{y}\le\frac{b}{c}$

Exemples
Soient x et y deux nombres réels tels que $3\le x\le 7$ et $8\le y\le 15$. Donner un encadrement des nombres suivants : $xy,\ \frac{1}{x},\ 2x+y\ et\ \frac{1}{y}-5y$

Réponses

On a $3\le x\le 7$ et $8\le y\le 15$, donc $24\le xy\le 105\ et\ \frac{1}{7}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{3}\ et\ 14\le 2x+y\le 29\ et\ \frac{1}{15}\le\frac{1}{y}\le\frac{1}{8}$ et

$40\le 5y\le 75$ donc $-75\le -5y\le -40$, alors $\frac{1}{15}-75\le\frac{1}{y}-5y\le\frac{1}{8}-40$. D'où

$24 \le xy \le 105$ *et* $\frac{1}{7} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{3}$ *et* $14 \le 2x + y \le 29$ *et* $-\frac{1124}{15} \le \frac{1}{y} - 5y \le -\frac{319}{8}$

4 – Encadrement et carré – Encadrement et racine carrée

Règle 9

Soient a, b et x trois réels positifs

1) Si $a \le x \le b$, alors $a^2 \le x^2 \le b^2$

2) Si $a \le x \le b$, alors $\sqrt{a} \le \sqrt{x} \le \sqrt{b}$

Exemples

Soit x un nombre réel tel que $2 \le x \le 9$. Donner un encadrement des nombres suivants :

x^2, $\sqrt{x}$, $3x^2 + 5\sqrt{x}$ *et* $\frac{3}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

Réponses

On a $2 \le x \le 9$, donc $4 \le x^2 \le 81$, $\sqrt{2} \le \sqrt{x} \le 3$ d'où $12 \le 3x^2 \le 243$, $5\sqrt{2} \le 5\sqrt{x} \le 15$,

$\frac{1}{81} \le \frac{1}{x^2} \le \frac{1}{4}$, $\frac{1}{3} \le \frac{1}{\sqrt{x}} \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ alors $12 + 5\sqrt{2} \le 3x^2 + 5\sqrt{2} \le 258$ et $\frac{3}{81} + \frac{2}{3} \le \frac{3}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \le \frac{3}{4} + \sqrt{2}$. Alors

$4 \le x^2 \le 81$, $\sqrt{2} \le \sqrt{x} \le 3$, $12 + 5\sqrt{2} \le 3x^2 + 5\sqrt{2} \le 258$ et $\frac{171}{243} \le \frac{3}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \le \frac{3}{4} + \sqrt{2}$

HTTPS://WWW.DIMAMATH.COM
Smail El jaâfari