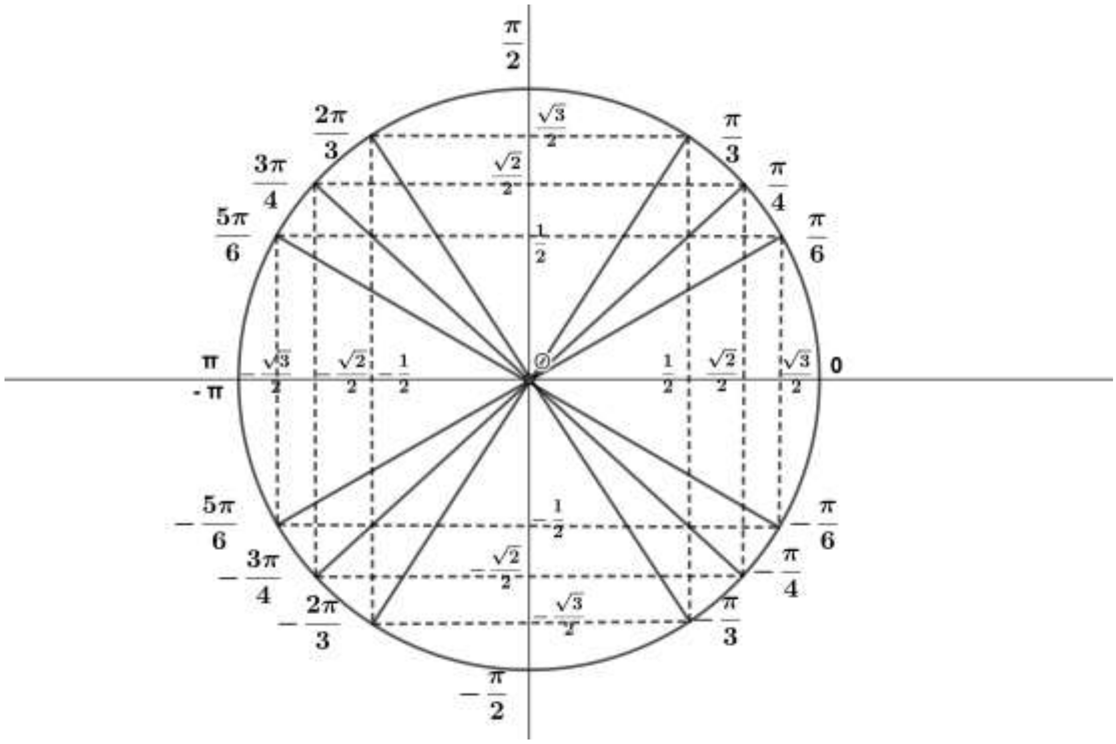
1 – Cercle trigonométrique



Cercle trigonométrique

2 – tableau des rapports trigonométriques usuels

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	⊗	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

3 - Rappels

Propriétés

- $(\forall x \in \mathbb{R}),\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\left(\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}\right),\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\left(\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}\right),\ \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Formules de transformations

$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$	$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$	$\tan(x + k\pi) = \tan x$
$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$	$\tan(-x) = -\tan x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\tan(\pi - x) = -\tan x$

$\cos(\pi+x)=-\cos x$	$\sin(\pi+x)=\sin x$	$\tan(\pi+x)=\tan x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$

4 – Equations trigonométriques

Proposition

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

- ❖ $\cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ \text{ou} \qquad (k\in\mathbb{Z}) \\ x=-\alpha+2k\pi \end{cases}$
- ❖ $\sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ \text{ou} \qquad (k\in\mathbb{Z}) \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \end{cases}$
- ❖ $\tan x=\tan\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \ \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k'\pi, k'\in\mathbb{Z}\right)$

Cas particuliers

$\cos x=0 \Leftrightarrow x\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$	$\sin x=0 \Leftrightarrow x\equiv 0[\pi]$	$\tan x=0 \Leftrightarrow x\equiv 0[\pi]$
$\cos x=1 \Leftrightarrow x\equiv 0[2\pi]$	$\sin x=1 \Leftrightarrow x\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$	$\tan x=1 \Leftrightarrow x\equiv\frac{\pi}{4}[\pi]$
$\cos x=-1 \Leftrightarrow x\equiv 0[\pi]$	$\sin x=-1 \Leftrightarrow x\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$	$\tan x=-1 \Leftrightarrow x\equiv-\frac{\pi}{4}[\pi]$

5 – Formules de transformations

$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$	$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$
$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$	$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$

$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\times\tan(b)}$
$\tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\times\tan(b)}$

6 – Fprmules de duplication

$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)$ $=2\cos^{2}{}'a)-1$ $=1-2\sin^2(a)$	$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$	$\tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$
$\cos(2a)=\frac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}$	$\sin(2a)=\frac{2\tan(a)}{1+\tan^2(a)}$	

7 – Formules de linéarisation

$\cos^2(a)=\dfrac{1+\cos(2a)}{2}$	$\sin^2(a)=\dfrac{1-\cos(2a)}{2}$	$\tan^2(a)=\dfrac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}$

8 – Formules trigonométriques transformant le produit en somme

$\cos(a)\cos(b)=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$	$\sin(a)\sin(b)=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$

$$\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

9 – Formules trigonométriques transformant une somme en un produit

$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$	$\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
$\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$	$\sin(p)-\sin(q)=2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

10 – Formule de transformation de $a\cos(x)+b\sin(x)$

Proposition

Soient a et b deux réels tels que $(a,b)\neq(0,0)$. Alors :

- $(\exists\alpha\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}) : a\cos(x)+b\sin(x)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$

  où $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

- $(\exists\beta\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}) : a\cos(x)+b\sin(x)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\beta)$

  Où $\cos\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$