Exercice 1

Calculer la limite de chacune des suites suivantes :

1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}^*),\ u_n=\frac{n}{n(n+1)}+\frac{n}{(n+1)(n+2)}+\frac{n}{(n+2)(n+3)}+\dots+\frac{n}{(2n-1)2n}$

2) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}^*),\ u_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\dots+\frac{1}{n^2+n}$

3) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}^*),\ u_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$

Exercice 2

On considère les suites numériques $(u_n)\ et\ (v_n)$ définies pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2} \\ u_n=\dfrac{2}{v_n} \\ v_0=2 \end{cases}$$

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ v_n\geq\sqrt{2}$

2) Montrer que (v_n) est décroissante et que (u_n) est croissante

3) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ v_n\geq u_n$

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(v_n-u_n)$

4) Etablir que $(u_n)\ et\ (v_n)$ sont adjacentes

5) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\sqrt{2}$

Exercice 3

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2}\ ,\ u_1=1 \\ u_{n+2}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{u_{n+1}}+\dfrac{1}{u_n}}\ (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

1) a) Calculer $u_2\ et\ u_3$

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ u_{n+1}=\frac{2u_n}{-1+4u_n}$

c) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ \frac{1}{2}\leq u_n\leq 1$

2) On considère les suites numériques $(a_n)\ et\ (b_n)$ définies pour tout entier naturel n, par :

$$a_n=u_{2n}\ et\ b_n=u_{2n+1}$$

a) Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=\left[\frac{1}{2},1\right]$ par : $f(x)=\frac{2x}{-1+4x}$.

Etablir que : $(\forall x\in I),\ f\circ f(x)=\frac{4x}{1+4x}$ et que la fonction $f\circ f$ est croissante sur l'intervalle I

b) Montrer que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante

c) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculer la limite de chacune d'elles

3) On considère la suite numérique (v_n) définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ v_n=\frac{1}{u_n}-\frac{4}{3}$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique

b) Déterminer u_n en fonction de n

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\frac{9x}{x^3+6}$.

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=1\ et\ u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel n

1) Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $I=\left[1,\sqrt[3]{3}\right]$ et que $f(I)\subset I$

2) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ 1\leq u_n\leq\sqrt[3]{3}$

3) Montrer que la suite (u_n) est croissante

4) Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite