Exercice 1

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{4} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^3+1}{u_n^2+1} \ (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 < u_n < 1$

2) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice 2

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 5,\ v_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \ et\ v_n = \dfrac{5}{u_n} \end{cases}$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ v_n \le u_n$

2) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite

Exercice 3

On considère les suites numériques $(a_n)_{n\ge1}$ et $(b_n)_{n\ge1}$ définies par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \text{ et } b_n = a_n + \frac{1}{n!}$$

1) Montrer que $(a_n)_{n\ge1}$ et $(b_n)_{n\ge1}$ sont adjacentes

2) Montrer que leur limite commune L est irrationnelle

Exercice 4

Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites numériques $(x_n)\ et\ (y_n)$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = b\ ;\ y_0 = a \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}\ ;\ y_{n+1} = \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \end{cases}$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ y_n > 0\ et\ x_n > 0$

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ x_n \ge y_n$

3) Montrer que les suites $(x_n)\ et\ (y_n)$ sont adjacentes.

4) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ x_n\, y_n = ab$

b) Déterminer la limite commune aux deux suites $(x_n)\ et\ (y_n)$

Exercice 5

Soit a un nombre réel tel que $a \in \left]0, \dfrac{1}{4}\right[$.

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{1-2u_n^2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 < u_n < \dfrac{1}{4}$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2) On considère la suite (S_n) définie par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = S_{2n}$ et $w_n = S_{2n+1}$

a) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes. On note L leur limite commune

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} \le \dfrac{2}{7} u_n$

c) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ |S_n - v_n| \le a \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \left(\dfrac{2}{7}\right)^k$

d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = L$

(Remarquer que : $|S_n - L| \le |S_n - v_n| + |v_n - L|$)