1 – Définition d'un polynôme

Définition

On appelle **polynôme** (ou **fonction polynômiale**) toute fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réels connus tels que $a_n \neq 0$ qui s'appellent les **coefficients** de ce polynôme

Et n est un entier naturel appelé **le degré** de ce polynôme

Remarque

- Les polynômes sont notés habituellement $P(x), Q(x), R(x) \ldots$
- L'écriture de l'expression d'un polynôme est ordonnée suivant les puissances décroissantes de la variable x
- Si $a_n \neq 0$, alors le degré de ce polynôme est n, on écrit : $\deg(P) = n$
- Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ est un polynôme tel que $a_n \neq 0$. Le nombre $P(x)$ est l'image de x

Exemples

- $P(x) = 3x^2 - 5x + 7$ est un polynôme de degré 2 : On l'appelle **un polynôme du second degré** et $P(0) = 7,\ P(1) = 5 \ldots$
- $Q(x) = -4x^5 + x^2 - 5x + \sqrt{3}$ est un polynôme de degré 5
- $R(x) = 7x^4 + 2x^3 - x + 5 + \dfrac{2}{x^2 + 1}$ **n'est pas un polynôme**

Exercice

Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que $P(0) = 3,\ P(1) = 2 \ et \ P(-1) = 0$

Réponse

P est un polynôme de degré 2 donc P s'écrit sous la forme $P(x) = a x^2 + b x + c$ où a, b et c sont des réels.

On a $P(0) = 3$ donc $c = 3$

Et on a $P(1) = 2$ donc $a + b + 3 = 2$ d'où $a + b = -1$

Et on a $P(-1) = 0$ donc $a - b + 3 = 0$ d'où $a - b = -3$

Donc a, b et c sont les solutions du système $\begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = -3 \\ c = 3 \end{cases}$

On alors $a = -2,\ b = 1 \ et \ c = 3$. Donc $P(x) = -2x^2 + x + 3$

2 – Egalité de deux polynômes

Propriété

Soient P et Q deux polynômes tels que $\mathrm{P}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ et $\mathrm{Q}(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ où $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0, b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1 \ et \ b_0$ sont des réels vérifiant $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. Alors :

$\mathrm{P}(x) = \mathrm{Q}(x)$ pour tout réel x, si et seulement si $\begin{cases} \deg(\mathrm{P}) = \deg(\mathrm{Q}) \\ \text{Les coefficients d'une puissance de } x \text{ sont égaux} \end{cases}$

Autrement dit : $P = Q$ si et seulement si $\begin{cases} n = m \\ a_k = b_k \text{ pout tout entier naturel } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n \end{cases}$

Exemples

Les polynômes suivants sont-ils égaux ?

1) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ et $Q(x) = 2x(x-1)^2 + x^2 + 3x - 1$

2) $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 2$ et $Q(x) = (x-1)(3x^2 + x + 2)$

3) $P(x) = 3x^4 + 2x^2 + x^3 - 2x$ et $Q(x) = 3x^5 + 2x^2 + x^3 - 2x$

4) $P(x) = -3x^5 + 2x^2 + x^3 - 2x + 5$ et $Q(x) = 3x^5 + 2x^2 + x^3 - 2x + 1$

Remarque

Deux polynômes ne sont pas égaux s'ils n'ont pas le même degré **ou** ils ont au moins un coefficient différent dans chacun des deux polynômes.

Autrement dit : $P \neq Q$ si et seulement si $\begin{cases} n \neq m \\ ou \\ a_k \neq b_k \text{ pout un entier naturel } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n \end{cases}$

3 – Somme et produit des polynômes

a – Somme de deux polynômes

Définition

Soient P et Q deux polynômes.

La somme des polynômes P et Q est aussi un polynôme, noté $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ tel que :

$$(\mathrm{P}+\mathrm{Q})(x) = \mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Exemple

1) $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 7$ et $Q(x) = -2x^2 + 7x + 8$.

$$\begin{aligned}(P+Q)(x) &= (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 7) + (-2x^2 + 7x + 8) \\ &= 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 7 - 2x^2 + 7x + 8 \\ &= 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 8x + 1\end{aligned}$$

2) $P(x) = -2x^3 + 7x^2 + 3x + 4$ et $Q(x) = -2x^3 + 7x^2 + 8$.

$$\begin{aligned}(P+Q)(x) &= (-2x^3 + 7x^2 + 3x + 4) + (2x^3 + 7x^2 + 8) \\ &= -2x^3 + 7x^2 + 3x + 4 + 2x^3 + 7x^2 + 8 \\ &= 14x^2 + 3x + 12\end{aligned}$$

Propriété

Soient P et Q deux polynômes. Alors :

$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P); \deg(Q))$$

b – Produit de deux polynômes

Définition (Produit d'un polynôme par un réel)

Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Le produit du polynôme P par le réel α est un polynôme, noté $\alpha\mathrm{P}$, tel que :

$$(\alpha\mathrm{P})(x) = \alpha \times \mathrm{P}(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Et on a : $\deg(\alpha P) = \deg(P)$

Définition (Produit de deux polynômes)

Soient P et Q deux polynômes.

Le produit des deux polynômes P et Q est un polynôme, noté PQ, tel que :

$$(PQ)(x) = [P(x)] \times [Q(x)] \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Et on a : $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

Exemples

1) $P(x) = 2x + 1$ *et* $Q(x) = x^2 - 2x + 4$

$$(PQ)(x) = (2x+1)(x^2 - 2x + 4) = 2x^3 - 4x^2 + 8x + x^2 - 2x - 4$$

$$= 2x^3 - 3x^2 + 6x - 4$$

Et on a : $\deg(PQ) = 2 + 1 = 3$

2) $P(x) = 3x^4 - 5x^2 + 6x + 4$

$(10P)(x) = 10 \times (3x^4 - 5x^2 + 6x + 4) = 30x^4 - 50x^2 + 60x + 40$. Et on a : $\deg(10P) = \deg(P) = 4$

4 – Division euclidienne des polynômes

Proposition

Soit P un polynôme de degré $n\,(n \in \mathbb{N}^*)$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Alors il existe un unique polynôme Q de degré $(n-1)$ tel que : $P(x) = (x-a) \times Q(x) + P(a)$

Cette égalité s'appelle **la division euclidienne** de $P(x)$ par $(x-a)$

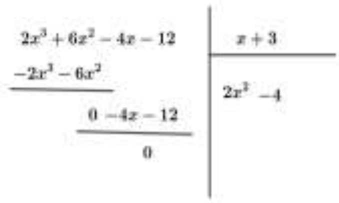
$Q(x)$ est appelé **le quotient** de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$ et $P(a)$ est le reste

Exemple

$P(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4x - 12$ *et* $a = -3$. Alors $P(x) = (x+3)Q(x) + P(-3)$

D'où $P(x) = (x+3)(2x^2 - 4)$

Car $Q(x) = 2x^2 - 4$ *et* $P(-3) = 0$



5 – Racines d'un polynôme

Définition

Soit P un polynôme et $a \in \mathbb{R}$.

On dit que a est une racine du polynôme P si et seulement si $P(a) = 0$

Exemple

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 4$

1) On a : $P(1) = 1^4 + 2 \times 1^3 + 1^2 - 4 = 1 + 2 + 1 - 4 = 0$. Donc 1 est une racine du polynôme P

2) On a : $P(-1) = (-1)^4 + 2 \times (-1)^3 + (-1)^2 - 4 = 1 - 2 + 1 - 4 = -4 \neq 0$. Donc (-1) n'est pas une racine du polynôme P.

Propriété

Soit P un polynôme de degré $n\left(n\in\mathbb{N}^{*}\right)$ et $a\in\mathbb{R}$.

a est une racine du polynôme P si et seulement si $\mathrm{P}(x)$ est divisible par $x-a$

Autrement dit : a est une racine du polynôme P si et seulement si il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $\mathrm{P}(x)=(x-a)\mathrm{Q}(x)$

Remarque

- On a : a est une racine du polynôme P équivaut à $\mathrm{P}(a)=0$ équivaut à $\mathrm{P}(x)=(x-a)\mathrm{Q}(x)$
- Pour déterminer le polynôme Q tel que : $\mathrm{P}(x)=(x-a)\mathrm{Q}(x)$ on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :
  - La division euclidienne de $\mathrm{P}(x)$ par $x-a$
  - Tableau de Horner : $\mathrm{P}(x)=x^4+2x^3+x^2-4$ par $x-1$

	x^4	x^3	x^2	x	x^0
Coefficients de $\mathrm{P}(x)$	1	2	1	0	-4
Coefficients de $\mathrm{Q}(x)$	0	1	3	4	4
	1	3	4	4	0

Alors : $\mathrm{Q}(x)=x^3+3x^2+4x+4$

D'où $\mathrm{P}(x)=(x-1)\left(x^3+3x^2+4x+4\right)$

Le reste de la division euclidienne De $\mathrm{P}(x)$ par $x-1$