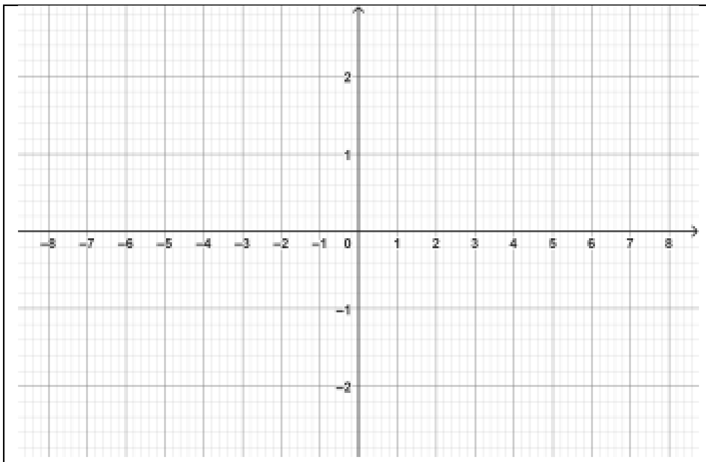
I – Repères – Coordonnées de points et de vecteurs

1 – Repères dans le plan

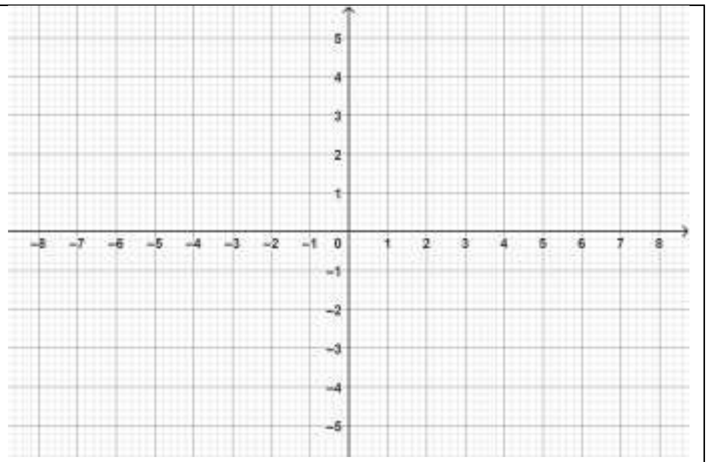
Définition

Un repère est déterminé par la donnée de trois points non alignés O, I et J, pris dans cet ordre, on le note $(O;\ I,\ J)$ ou $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

- ♣ Le point O est pris comme **origine** de ce repère
- ♣ La droite graduée (OI) est habituellement prise comme **axe des abscisses** où OI est **l'unité de graduation** de l'axe des abscisses
- ♣ La droite graduée (OJ) est habituellement prise comme **axe des ordonnées** où OJ est **l'unité de graduation** de l'axe des ordonnées
- ♣ Si $(OI)\perp(OJ)$, on dit que le repère $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ est **orthogonal**
- ♣ **Si** $(OI)\perp(OJ)$ et $OI=OJ=1$, on dit que le repère $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ est **orthonormé**



Repère orthogonal



Repère orthonormé

2 – Coordonnées d'un point et d'un vecteur

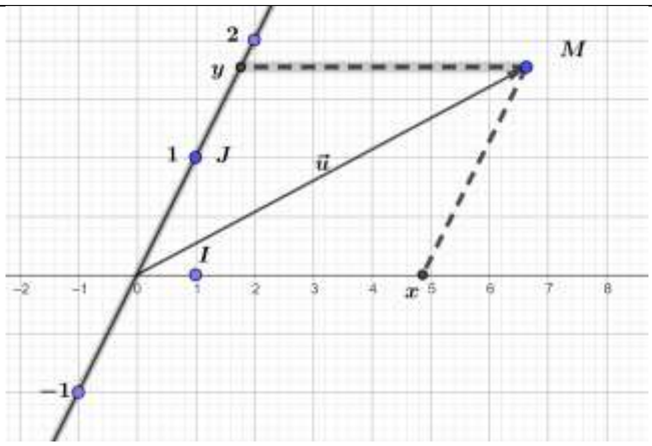
Théorème et définition (Coordonnées d'un point)

Le plan est rapporté à un repère $(O;I,J)$. Soit M un point du plan, alors il existe un unique couple (x,y) tels que $x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\ et\ \overrightarrow{OM}=x.\overrightarrow{OI}+y.\overrightarrow{OJ}$

Le couple (x,y) s'appelle **le couple de coordonnées** du point M, on note habituellement $M(x,y)$.

Le réel x s'appelle **l'abscisse** du point M

Le réel y s'appelle **l'ordonnée** du point M



Définition 1 (Coordonnées d'un vecteur)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\mathrm{I},\mathrm{J})$.

Le couple de coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ est le couple de coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{u}$

On note $\vec{u}(x,y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

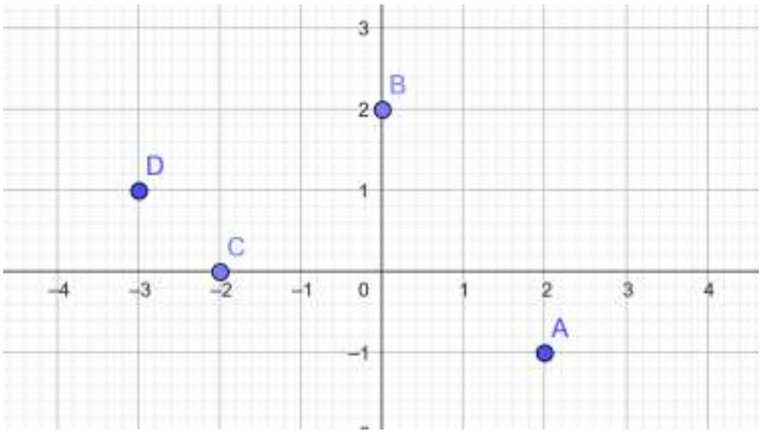
On a alors : $\vec{u}=x.\overrightarrow{\mathrm{OI}}+y.\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$

Exemples

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$ où $\vec{i}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ *et* $\vec{j}=\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$.

Placer dans ce repère les points $A(2,-1);\ B(0,2);\ C(-2,0)\ et\ D(-3,1)$

Réponse



Définition 2

Dans le plan est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $\mathrm{A}(x_A,y_A)$ et $\mathrm{B}(x_B,y_B)$, alors :

- $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(x_B-x_A,y_B-y_A)$
- $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
- Le milieu I du segment $[\mathrm{AB}]$ a pour coordonnées : $\mathrm{I}\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

Propriétés

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$. Soient $\vec{u}(x,y)$ *et* $\vec{v}(x',y')$ *et* $\alpha\in\mathbb{R}$. On a :

- $\vec{u}(x,y)=\vec{0}$ équivaut à $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$
- $\vec{u}(x,y)=\vec{v}(x',y')$ équivaut à $\begin{cases}x=x'\\y=y'\end{cases}$
- $\vec{u}+\vec{v}(x+x',y+y')$ et $\vec{u}-\vec{v}(x-x',y-y')$
- $\alpha.\vec{u}(\alpha x,\alpha y)$

Exemples

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $\mathrm{A}(-1,1)$ et $\mathrm{B}(2,3)$

1) Déterminer les coordonnées du point I le milieu du segment $[AB]$ et calculer la distance AB

2) Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$

3) Quelle est la nature du quadrilatère $OACB$?

4) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}=2\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AC}$

II – Colinéarité de deux vecteurs

1 – Déterminant de deux vecteurs

Définition

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Le déterminant des deux vecteurs $\vec{u}(x,y)$ *et* $\vec{v}(x',y')$ est le réel $\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-x'y$

Exemples

1) Soient $\vec{u}(3,4)$ *et* $\vec{v}(-2,3)$. On a : $\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=3\times3-4\times(-2)=9+8=17$

2) Soient $\vec{u}(-3,4)$ *et* $\vec{v}(6,-8)$. On a : $\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}=(-3)\times(-8)-4\times6=24-24=0$

3) Soient $\vec{u}(5,-4)$ *et* $\vec{v}(6,-8)$. On a : $\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -8 \end{vmatrix}=(5)\times(-8)-(-4)\times6=-40+24=-16$

2 – Colinéarité de deux vecteurs

Définition

On dit que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement s'il existe un réel k tel que :

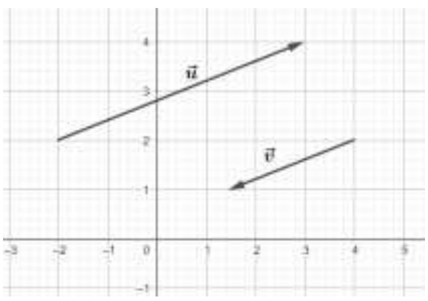
$$\vec{v}=k.\vec{u}$$

Propriété

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Les vecteurs $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ sont **colinéaires** si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v})=0$

Exemple



- Les vecteurs $\vec{u}(5,2)$ *et* $\vec{v}\left(-\frac{5}{2},-1\right)$ sont colinéaires car

$$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=5\times(-1)-2\times\left(-\frac{5}{2}\right)=-5+5=0$$

- Les vecteurs $\vec{u}(5,2)$ et $\vec{w}(-1,3)$ ne sont pas colinéaires car

$$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=15+2=17\neq0$$

3 – Alignement des points

Définition

On dit que les **trois points** A, B et C **sont alignés** si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que

$$\overrightarrow{AC}=k.\overrightarrow{AB}$$

Propriété

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Les **trois points** A, B et C **sont alignés** si et seulement $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=0$

Exemple

Les points $A(-2,3)$, $B(0,-1)$ *et* $C(-3,5)$ sont-ils- alignés ?

On a $\overrightarrow{AB}(2,-4)$ *et* $\overrightarrow{AC}(-1,2)$ donc $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{vmatrix}=4-4=0$

Alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires d'où les points A, B et C sont alignés

III – Equations de droites

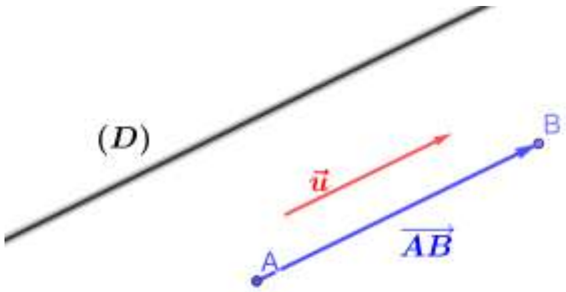
1 – Vecteur directeur d'une droite

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et (D) une droite du plan $\mathscr{P}$.

On dit que le vecteur $\vec{u}$ est **un vecteur directeur** de la droite (D) si et seulement si la droite (D) est une direction du vecteur $\vec{u}$

En particulier, si A et B sont deux points distincts du plan $\mathscr{P}$, alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (D) si et seulement si $(AB)\parallel(D)$



Remarques

- Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite (D), alors chaque vecteur $\vec{v}$ non nul colinéaire avec $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (D).
- Toute droite possède une infinité de vecteurs directeurs.

Définition (Définition vectorielle d'une droite)

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point du plan $\mathscr{P}$.

L'ensemble des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que $\overrightarrow{AM}=k.\vec{u}$ où $k\in\mathbb{R}$ est la droite notée $D(A;\vec{u})$, qui passe par le point A et dont un vecteur directeur est $\vec{u}$

$$D(A;\vec{u})=\left\{M\in\mathscr{P}\ /\ \overrightarrow{AM}=k.\vec{u}\text{ et }k\in\mathbb{R}\right\}$$

2 – Représentation paramétrique d'une droite

Définition

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit (D) la droite passant par un point $A(x_A,y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a,b)$.

Le système $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite $D(A;\vec{u})$

Remarque

- $M(x,y) \in D(A,\vec{u})$ équivaut à $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. Comme $\overrightarrow{AM}(x - x_A, y - y_A)$ et $t.\vec{u}(at, bt)$,

  $\overrightarrow{AM} = t.\vec{u}$ équivaut à $\begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

- Si $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite $D(A;\vec{u})$, alors

  Le vecteur $\vec{w}(a,b)$ est un vecteur directeur de la droite $D(A;\vec{u})$ et tout point de coordonnées $(x_A + at, y_A + bt)$ où t est un réel est un point de la droite $D(A;\vec{u})$

Exemples

1) On considère la droite (Δ) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

a/ Déterminer deux points de la droite (Δ)

b/ Déterminer un vecteur directeur de la droite (Δ)

réponse

a/ La droite (Δ) passe par les points $A(-2,1)$ (en posant $t = 0$) et $B(7,-14)$ (en posant $t = 3$)

b/ $\vec{u}(3,-5)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)

2) Soient $E(3,-1)$ et $F(0,1)$ deux points du plan

a/ Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EF)

b/ Dire si chacun des points $A(-3,3);\ B(6,1)\ et\ C(-12,9)$

Réponse

a/ $\overrightarrow{EF}(-3,2)$ est un vecteur directeur de la droite (EF) qui passe par le point $F(0,1)$, alors

une représentation paramétrique de la droite (EF) est $\begin{cases} x = \quad -3t \\ y = 1 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

b/ $\begin{cases} -3 = \quad -3t \\ 3 = 1 + 2t \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$ donc $A(-3,3) \in (EF)$

$\begin{cases} 6 = \quad -3t \\ 1 = 1 + 2t \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \end{cases}$ donc $B(6,1) \notin (EF)$

$\begin{cases} -12 = \quad -3t \\ 9 = 1 + 2t \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} t = 4 \\ t = 4 \end{cases}$ donc $C(-12,9) \in (EF)$

3 – Equation cartésienne d'une droite

Théorème et définition

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Toute droite (Δ) admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ et $c\in\mathbb{R}$.
Cette équation s'appelle **une équation cartésienne** de la droite (Δ)

Preuve

Soit (Δ) une droite de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha,\beta)$ et passant par le point $A(x_A,y_A)$.

$M(x,y)\in(\Delta)$ équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

Equivaut à $\det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)=0$

Equivaut à $\begin{vmatrix} x-x_A & \alpha \\ y-y_A & \beta \end{vmatrix}=0$ puisque $\overrightarrow{AM}(x-x_A,y-y_A)$

Equivaut à $\beta(x-x_A)-\alpha(y-y_A)=\beta x+(-\alpha)y+(\alpha y_A-\beta x_A)=0$

En posant $a=\beta,\ b=-\alpha$ et $c=\alpha y_A-\beta x_A$ on a :

$M(x,y)\in(\Delta)$ équivaut à $ax+by+c=0$

Remarque

Si $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne d'une droite (D), alors toute équation de la forme $(ka)x+(kb)y+(kc)=0$ est aussi une équation cartésienne de la droite (D).

Donc toute droite admet une infinité d'équations cartésiennes

Propriété

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ et $c\in\mathbb{R}$

L'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant l'équation $ax+by+c=0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b,a)$

Exemple

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point $A(2,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-3,2)$.

Réponse

$M(x,y)\in(D)$ équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires équivaut à $\begin{vmatrix} x-2 & -3 \\ y-1 & 2 \end{vmatrix}=0$

Equivaut à $2(x-2)+3(y-1)=0$ équivaut à $2x+3y-7=0$

Donc une équation cartésienne de la droite (D) est $2x+3y-7=0$

4 – Equation réduite d'une droite

Théorème et définition

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Toute droite (D) non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y=mx+p$ où $(m,p)\in\mathbb{R}^2$

- L'équation $y=mx+p$ s'appelle **l'équation réduite** de la droite (D)
- Le nombre réel m s'appelle **le coefficient directeur** de la droite (D)
- Le nombre réel p s'appelle **l'ordonnée à l'origine**

Propriétés

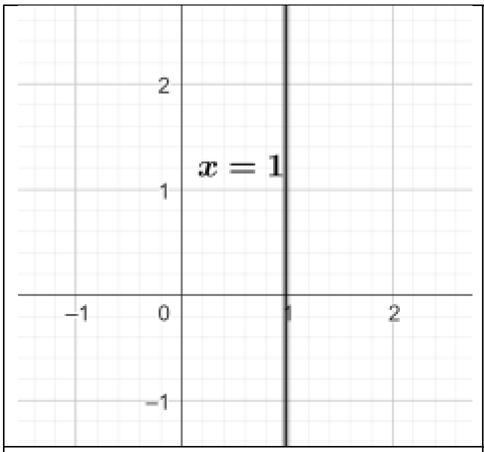
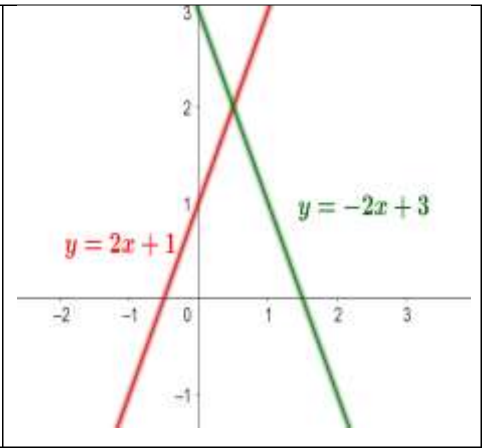
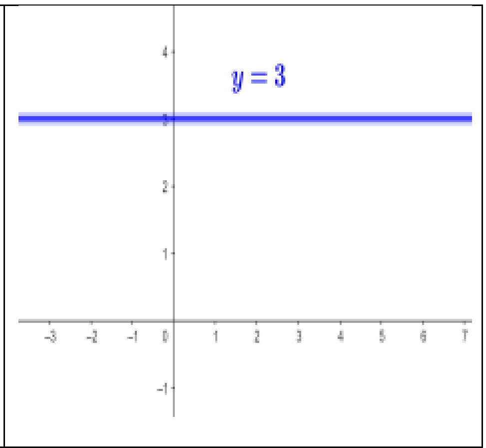
- m est le coefficient directeur d'une droite si et seulement si $\vec{u}(1,m)$ est son vecteur directeur
- $\vec{u}(-b,a)$ est un vecteur directeur d'une droite et $b \neq 0$ si et seulement si le nombre réel $m = -\dfrac{a}{b}$ est le coefficient directeur de cette droite
- Si $\mathrm{A}(x_A, y_A)$ et $\mathrm{B}(x_B, y_B)$ sont deux points du plan tels que $x_A \neq x_B$, alors le nombre réel $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ est le coefficient directeur de la droite (AB)

Remarques

- Une droite est parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si son équation cartésienne est $x = c$ où $c \in \mathbb{R}$
- Une droite est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si son équation cartésienne est $y = c$ où $c \in \mathbb{R}$
- Différentes définitions d'une droite dans le plan

$D(A;\vec{u})$	Equation cartésienne	Equation réduite	Représentation paramétrique
(D) passe par $A(x_A, y_A)$ Et de vecteur directeur $\vec{u}(-b,a)$	$ax + by + c = 0$	$y = mx + p$ $b \neq 0$ et $m = -\dfrac{a}{b}$	$\begin{cases} x = x_A - bt \\ y = y_A + at \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

- Représentations graphiques de quelques droites

		
$x = 1$	$y = 2x + 1$; $y = -2x + 3$	$y = 3$

IV – Positions relatives de deux droites

1 – Droites parallèles

Proposition 1

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Deux droites (D) et (Δ), d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$, sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux $m = m'$

Proposition 2

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Deux droites (D) et (Δ), d'équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c = 0$ où $(a,b) \neq (0,0)$ *et* $(a',b') \neq (0,0)$, sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$

Proposition 3

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Deux droites (D) et (Δ), d'équations respectives $ax+by+c=0$ et $y=mx+p$ où $(a,b)\neq(0,0)$, sont parallèles si et seulement si $a+mb=0$

Exemples

Les droites (D_1) et (D_2) sont-elles parallèles ? dans chacun des cas suivants :

1) $(D_1): y=-2x+9$ et $(D_2): y=-2x-4$

2) $(D_1): 3x+2y-5=0$ et $(D_2): 9x+6y+1=0$

3) $(D_1): 8x+2y+7=0$ et $(D_2): y=-4x+1$

2 – Droites perpendiculaires

Proposition 1

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Deux droites (D) et (Δ), d'équations réduites respectives $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$, sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1 :
$m\times m'=-1$

Proposition 2

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Deux droites (D) et (Δ), d'équations cartésiennes respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c=0$ où $b\neq0$ et $b'\neq0$, sont perpendiculaires si et seulement si $aa'+bb'=0$

Exemples

Les droites (D) *et* (D') sont-elles perpendiculaires, dans chacun des cas suivants ?

1) $(D): y=5x+1$ *et* $(D'): y=-\dfrac{1}{5}x+4$

2) $(D): 5x+3y-2=0$ *et* $(D'): 3x-5y+7=0$

3 – Droites sécantes

Proposition 1

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Deux droites (D) et (Δ), d'équations cartésiennes respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c=0$ où $(a,b)\neq(0,0)$ *et* $(a',b')\neq(0,0)$, sont sécantes si et seulement si $ab'-a'b\neq0$.

Le couple de coordonnées du point d'intersection des deux droites (D) et (Δ) est la solution du système $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

Proposition 2

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Deux droites (D) et (Δ), d'équations réduites respectives $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$, sont sécantes si et seulement si $m\neq m'$.

Le couple de coordonnées du point d'intersection des deux droites (D) et (Δ) est la solution du système $\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$

Exemples

Montrer que les deux droites suivantes sont sécantes et déterminer leur point d'intersection, dans chacun des cas suivants :

1) $(D): 2x - 3y - 5 = 0$ et $(D'): x + 4y + 3 = 0$

2) $(D): y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ et $(D'): y = -\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$