I – Ordre et comparaison

1 – Ordre et opérations

Définition

Soient a et b deux nombres réels.

- $a < b$ équivaut à $a - b < 0$
- $a \leq b$ équivaut à $a - b \leq 0$
- $a > b$ équivaut à $a - b > 0$
- $a \geq b$ équivaut à $a - b \geq 0$

Remarque

Comparer deux nombres réels a et b revient à étudier le signe de $a - b$

Propriété 1

Soit a, b et c trois réels tels que $a < b$, alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$

Autrement dit : ajouter ou soustraire un même nombre à chaque membre d'une inégalité ne change pas le sens de cette inégalité

Propriété 2

Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$

Propriété 3

Soient a, b et c trois réels.

- Si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$ et $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

  Autrement dit : Multiplier ou diviser chaque membre d'une inégalité par un même nombre strictement positif ne change pas le sens de cette inégalité

- Si $a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$ et $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

  Autrement dit : Multiplier ou diviser chaque membre d'une inégalité par un même nombre strictement négatif change le sens de cette inégalité

Propriété 4

Soient a, b, c et d quatre nombres réels positifs tels que $a < b$ et $c < d$, alors $ac < bd$ et $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$

Remarque

- **Encadrer** un nombre réel x revient à trouver deux nombres réels a et b tels que $a < x < b$ ou $a \leq x < b$ ou $a < x \leq b$ ou $a \leq x \leq b$. Le nombre positif $b - a$ s'appelle **l'amplitude** de cet encadrement
- $a \leq x$ et $x \leq b$ équivaut à : $a \leq x \leq b$ et on lit « x est compris entre a et b »
- $a < x$ et $x < b$ équivaut à : $a < x < b$ et on lit « x est compris strictement entre a et b »

Exemple

Sachant que $-2 < x \leq 3$, trouver un encadrement de $A = -\frac{2}{3}x + 5$

2 – Ordre et carrés, racines carrées et inverses

Propriété 1

Soient a et b deux nombres réels positifs tels que $a < b$, alors $a^2 < b^2$ et $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

Autrement dit : Deux nombres réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés et leurs racines carrées

Propriété 2

Soient a et b strictement positifs tels que $a<b$, alors $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

Autrement dit : Deux nombres réels strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses

Exemple

Soit a un nombre réel tel que $3\leq a\leq 7$. Donner un encadrement de $\mathrm{B}=2a+\frac{1}{a}$

3 – Comparaison d'un nombre positif, de son carré et son cube

Propriété

Soit a un nombre réel strictement positif.

- Si $a>1$, alors $a<a^2<a^3$
- Si $0<a<1$, alors $a^3<a^2<a$

Exemple

Soit a un nombre réel tel que $8<a<9$. On pose $\mathrm{A}=9-a$

Comparer les nombres réels $\mathrm{A},\ \mathrm{A}^2\ et\ \mathrm{A}^3$

II – Intervalles de IR

1 – Définitions

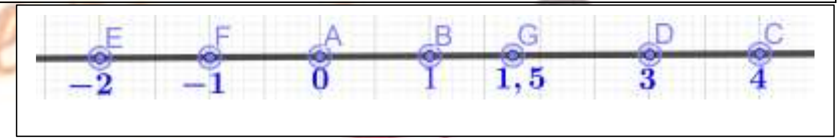
Définition (La droite numérique)

L'ensemble des nombres réels est représenté par une droite graduée où à chaque point est associé un unique nombre réel nommé abscisse de ce point

Les points A, B, C, D, E, F et G ont pour Abscisses :

$x_A=0,\ x_B=1,\ x_C=4,\ x_D=3,\ x_E=-2$,

$x_F=-1$ et $x_G=1{,}5$

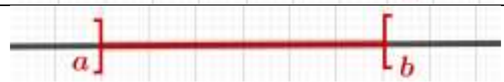
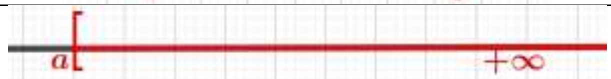
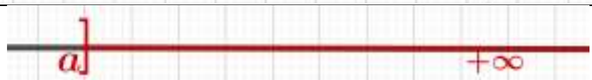
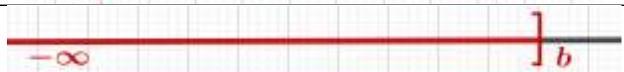
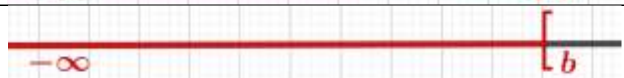


Définition (Types d' intervalles)

Un intervalle est donné sous trois formes : Des crochets, un encadrement de x et la droite numérique

On donne les différents types d'intervalles dans le tableau ci-dessous

Soient a et b deux réels tels que $a<b$

Intervalle	Encadrement	Représentation sur la droite numérique
$[a,b]$	$a\leq x\leq b$	
$[a,b[$	$a\leq x<b$	
$]a,b]$	$a<x\leq b$	
$]a,b[$	$a<x<b$	
$[a,+\infty[$	$x\geq a$	
$]a,+\infty[$	$x>a$	
$]-\infty,b]$	$x\leq a$	
$]-\infty,b[$	$x<a$	

Remarques

Soient a et b deux réels tels que $a<b$

- $[a,b]=\{x\in\mathbb{R} / a\leq x\leq b\}$ est l'intervalle fermé borné ou segment
- $[a,b[=\{x\in\mathbb{R} / a\leq x< b\}$ est l'intervalle semi-ouvert à droite et borné
- $]a,b]=\{x\in\mathbb{R} / a< x\leq b\}$ est l'intervalle semi-ouvert à gauche et borné
- $]a,b[=\{x\in\mathbb{R} / a< x< b\}$ est l'intervalle ouvert et borné
- $[a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R} / a\leq x\}$ est l'intervalle fermé non borné à droite
- $]a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R} / a< x\}$ est l'intervalle ouvert non borné à droite
- $]-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R} / x\leq b\}$ est l'intervalle fermé non borné à gauche
- $]-\infty,b[=\{x\in\mathbb{R} / x< b\}$ est l'intervalle ouvert non borné à gauche

2 – Intersection et réunion d'intervalles de IR

Définition 1 (Intersection d'intervalles)

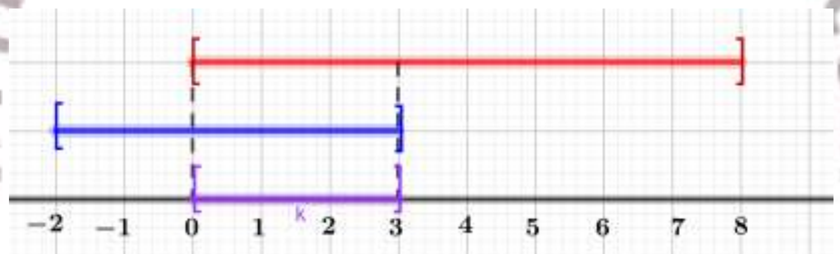
Soient A et B deux ensembles.

L'ensemble des éléments communs entre A et B s'appelle **L'intersection de A e B** et se note $A\cap B$.

$$A\cap B=\{x / x\in A \text{ et } x\in B\}$$

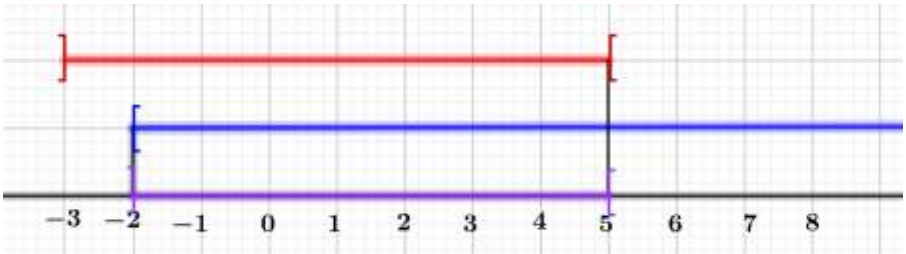
Exemples

1) Déterminer $[-2,3]\cap[0,8]$



Alors $[-2,3]\cap[0,8]=[0,3]$

2) Déterminer $[-2,+\infty[\cap]-3,5[$



Alors $[-2,+\infty[\cap]-3,5[=[-2,5[$

3) Justifier que $]-\infty,1]\cap]2,+\infty[=\varnothing$

Définition 2 (Réunion d'intervalles)

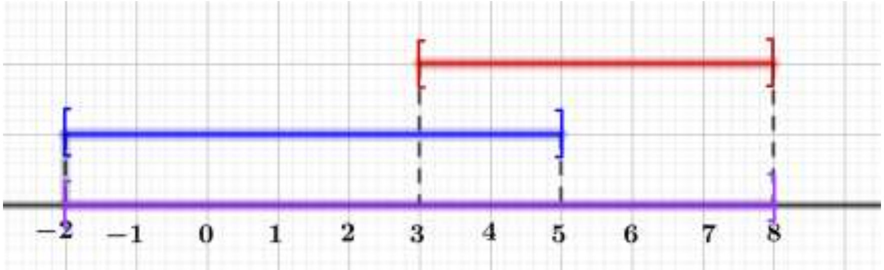
Soient A et B deux ensembles.

L'ensemble de tous les éléments de A et tous les éléments de B s'appelle **La réunion de A e B** et se note $A\cup B$.

$$A\cup B=\{x / x\in A \text{ ou } x\in B\}$$

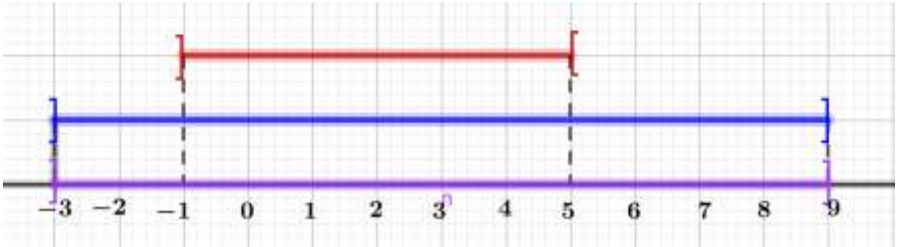
Exemples

1) Déterminer $[-2,5]\cup[3,8]$ et $[-2,5]\cap[3,8]$



Alors $[-2,5]\cup[3,8]=[-2,8]$ et $[-2,5]\cap[3,8]=[3,5]$

2) Déterminer $]-3,9]\cup]-1,5[$



Alors $]-3,9]\cup]-1,5[=]-3,9]$ et $]-3,9]\cap]-1,5[=]-1,5[$

III – Valeur absolue

1 – Distance entre deux nombres réels

Définition

Soient A et B deux points d'une droite graduée, d'abscisses respectives a et b telles que $a<b$. La distance entre les réels a et b est égale à la distance AB, on a : $AB = b - a$

Définition

Soient a et b deux nombres réels tels que $a<b$.

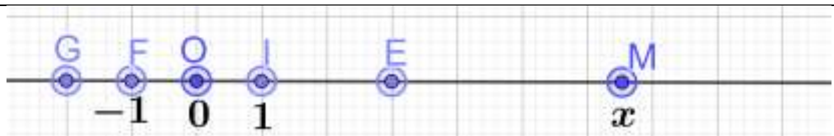
- La distance entre a et b est $b - a$, et est appelée aussi **longueur ou amplitude de l'intervalle** $[a,b]$
- Le nombre réel $c=\dfrac{a+b}{2}$ est appelé **le centre de l'intervalle** $[a,b]$
- Le nombre réel positif $r=\dfrac{b-a}{2}$ est appelé **le rayon de l'intervalle** $[a,b]$

2 – Valeur absolue d'un nombre réel

Définition

Soit x un nombre réel.

La valeur absolue de x, notée $|x|$, est la distance de 0 à x



Remarques

- Pour tout nombre réel x, on a : $|x|\geq 0$
- $|x|=0$ si et seulement si $x=0$
- Pour tout nombre réel x, on a : $-|x|\leq x\leq |x|$
- $\begin{cases}|x|=x \ si \ x\geq 0\\ |x|=-x \ si \ x\leq 0\end{cases}$

Exemples

$|9|=9$ $|-10|=10$ $|\pi-3|=\pi-3$ $|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$ $|\sqrt{5}-2,5|=2,5-\sqrt{5}$

Propriétés 1

Soient a et b deux nombres réels et $r\in\mathbb{R}_+^*$. On a :

- $|a|\geq 0$
- $-|a|\leq a\leq |a|$
- $|-a|=|a|$
- $|a|^2=|a^2|=a^2$
- $|a|=0$ si et seulement si $a=0$
- $|a|=|b|$ si et seulement si $a=b$ ou $a=-b$
- $\sqrt{a^2}=|a|$
- $|a|=r$ si et seulement si $a=r$ ou $a=-r$

Exemples

- Résoudre l'équation $|x|=2$

  En effet : $|x|=2$ équivaut à $x=2$ ou $x=-2$. Donc $S=\{-2,2\}$
- Résoudre l'équation : $|x-3|=4$

  $|x-3|=4$ équivaut à $x-3=4$ ou $x-3=-4$

  équivaut à $x=7$ ou $x=-1$

  Donc $S=\{-1,7\}$
- Résoudre l'équation : $|2x+1|=-5$

  On sait que $|2x+1|\geq 0$, alors c'est impossible d'avoir $|2x+1|=-5$ D'où $S=\varnothing$

Propriétés 2

Soient a et b deux nombres réels

- $|a\times b|=|a|\times|b|$
- Si $b\neq 0$, on a $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$
- $|a|-|b|\leq|a+b|\leq|a|+|b|$

3 – Encadrement et valeur approchée d'un nombre réel

Propriété

Soient $a\in\mathbb{R}$ et $r>0$.

- $|x-a|\leq r$ équivaut à : $a-r\leq x\leq a+r$
- $|x-a|\leq r$ équivaut à : $x\in[a-r,a+r]$
- $|x-a|\geq r$ équivaut à : $x\leq a-r$ ou $x\geq a+r$
- $|x-a|\geq r$ équivaut à : $x\in]-\infty,a-r]\cup[a+r,+\infty[$

Définition

Soient a *et* x deux nombres réels et ε un nombre réel strictement positif.

On dit que a est une valeur approchée du nombre x à ε près si et seulement si $|x-a|<\varepsilon$

<u>Exemples</u>

1) Soit $x\in[2,4]$, déterminer $a\in\mathbb{R}$ *et* $\varepsilon>0$ tels que $|x-a|\leq\varepsilon$.

Le centre de l'intervalle $[2,4]$ est $c=\dfrac{2+4}{2}=3$ et $\varepsilon=\dfrac{4-2}{2}=1$ Donc $|x-3|\leq 1$

$x\in[2,4]$ équivaut à $|x-3|\leq 1$ Alors 3 est une valeur approchée de $x\in[2,4]$ à 1 près

2) Soit $x\in[0,25;0,65]$ déterminer une valeur approchée de x à 0,2 près

On pose $c=\dfrac{0,25+0,65}{2}=0,45$ *et* $r=\dfrac{0,65-0,25}{2}=0,2$

Alors on a : $|x-c|\leq r$ c'est - à - dire que $|x-0,45|\leq 0,2$

Donc $0,45$ est une valeur approchée à $0,2$ près