I – Les ensembles des nombres

1 – Les nombres entiers naturels

Définition

- L'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4...\}$
- L'ensemble des entiers naturels non nuls : $\mathbb{N}^{*}=\{1,2,3,4,5,...\}$

2 – Les nombres entiers relatifs

Définition

- L'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$
- L'ensemble des entiers relatifs non nuls : $\mathbb{Z}^{*}=\{...,-3,-2,-1,1,2,3,...\}$
- L'ensemble des entiers relatifs positifs : $\mathbb{Z}_{+}=\{0,1,2,3,...\}=\mathbb{N}$
- L'ensemble des entiers relatifs négatifs : $\mathbb{Z}_{-}=\{...,-3,-2,-1,0\}$
- L'ensemble des entiers relatifs strictement positifs : $\mathbb{Z}_{+}^{*}=\{1,2,3,4,5,...\}=\mathbb{N}^{*}$
- L'ensemble des entiers relatifs strictement négatifs : $\mathbb{Z}_{-}^{*}=\{...,-5,-4,-3,-2,-1\}$

Remarques

- $\mathbb{Z}_{+}\cap\mathbb{Z}_{-}=\{0\}$ *et* $\mathbb{Z}_{+}\cup\mathbb{Z}_{-}=\mathbb{Z}$
- $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$

3 – Les nombres décimaux

Définition

- L'ensemble des nombres décimaux : $\mathbb{D}=\left\{\dfrac{a}{10^{n}} \,/\, a\in\mathbb{Z} \text{ et } n\in\mathbb{N}\right\}$
- L'ensemble des nombres décimaux non nuls : $\mathbb{D}^{*}=\left\{\dfrac{a}{10^{n}} \,/\, a\in\mathbb{Z}^{*} \text{ et } n\in\mathbb{N}\right\}$
- L'ensemble des nombres décimaux positifs : $\mathbb{D}_{+}=\left\{\dfrac{a}{10^{n}} \,/\, a\in\mathbb{N} \text{ et } n\in\mathbb{N}\right\}$
- L'ensemble des nombres décimaux négatifs : $\mathbb{D}_{-}=\left\{\dfrac{a}{10^{n}} \,/\, a\in\mathbb{Z}_{-} \text{ et } n\in\mathbb{N}\right\}$
- L'ensemble des nombres décimaux strictement positifs : $\mathbb{D}_{+}^{*}=\left\{\dfrac{a}{10^{n}} \,/\, a\in\mathbb{N}^{*} \text{ et } n\in\mathbb{N}\right\}$
- L'ensemble des nombres décimaux strictement négatifs : $\mathbb{D}_{+}^{*}=\left\{\dfrac{a}{10^{n}} \,/\, a\in\mathbb{Z}_{-}^{*} \text{ et } n\in\mathbb{N}\right\}$

Exemples

- $\dfrac{3}{8}=0,375=\dfrac{375}{1000}=\dfrac{375}{10^{3}}$ donc $\dfrac{3}{8}\in\mathbb{D}$
- $-\dfrac{7}{2000}=-\dfrac{35}{10000}=\dfrac{-35}{10^{4}}$ donc $-\dfrac{7}{2000}\in\mathbb{D}$
- $-21=\dfrac{-21}{1}=\dfrac{-21}{10^{0}}$ donc $-21\in\mathbb{D}$

Remarques

- $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}$
- Un nombre est décimal s'il s'écrit avec un nombre fini de chiffres à droite de la virgule

- $\mathbb{D}_+ \cup \mathbb{D}_- = \mathbb{D}$ et $\mathbb{D}_+ \cap \mathbb{D}_- = \{0\}$

4 – Les nombres rationnels

Définition

- L'ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,/\, p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$
- L'ensemble des nombres rationnels non nuls : $\mathbb{Q}^* = \left\{ \frac{p}{q} \,/\, p \in \mathbb{Z}^* \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$

Exemples

- $2{,}5 \in \mathbb{Q}$ $\quad -0{,}0125 \in \mathbb{Q}$ $\quad 357 \in \mathbb{Q}$
- $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ $\quad \frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$ $\quad \frac{-34}{47} \in \mathbb{Q}$

Remarques

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$
- $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

Proposition

Dans l'écriture décimale de chaque nombre rationnel il y a une suite de chiffres qui se répète indéfiniment. Cette suite de chiffres est appelée la période de ce nombre rationnel.

Exemples

- $\frac{1}{3} = 0{,}3333...$ la période est 3 donc $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$
- $-\frac{1}{101} = -0{,}118811881188$ La période est 1188 donc $\frac{1}{101} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{101} \notin \mathbb{D}$

5 – Les nombres réels

Définition

- L'ensemble des nombres irrationnels : $\mathbb{I} = \{ x \,/\, x \notin \mathbb{Q} \}$
- L'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
- L'ensemble des nombres réels non nuls : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0 \}$
- L'ensemble des réels positifs : $\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0 \}$
- L'ensemble des nombres réels négatifs : $\mathbb{R}_- = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 0 \}$
- L'ensemble des nombres strictement positifs : $\mathbb{R}_+^* = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0 \}$
- L'ensemble des nombres strictement négatifs : $\mathbb{R}_-^* = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x < 0 \}$

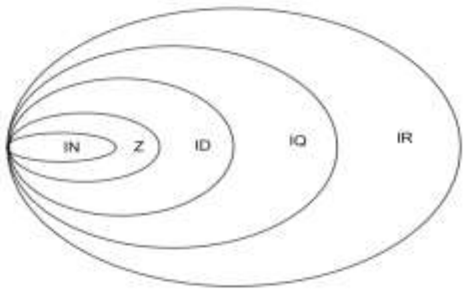
Exemples

- Le nombre $9{,}101001000100001000001...$ n'est pas rationnel car son écriture décimale n'est pas périodique, il est un nombre **irrationnel**
- $\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 95... \in \mathbb{I}$ donc $\pi \in \mathbb{R}$
- $e = 2{,}71828182845904523536028747135 27... \in \mathbb{I}$ donc $e \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{2} = 1{,}41421356237309504880168872420 97... \in \mathbb{I}$ donc $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
- $\frac{7}{17} \in \mathbb{R}$

Remarques

- $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$ et $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



II – Règles de calcul dans l'ensemble des nombres réels

1 – Fractions de nombres réels

Règles de calculs des réels

Soient a, b, c et d quatres nombres réels tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$. Alors on a :

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- Si $c \neq 0$, $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
- $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$

2 – Racines carrées

Définition

Soit x un nombre réel positif, **la racine carrée** du nombre réel x **est le nombre réel positif** dont le carré est égal à x, on la note $\sqrt{x}$

Exemples

$\sqrt{25} = 5$ $\quad\sqrt{\frac{9}{169}} = \frac{3}{13}$ $\quad\sqrt{17^2} = 17$ $\quad\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Remarques

- $\sqrt{A}$ n'existe que si $A \geq 0$
- $\sqrt{-1}$ n'existe pas

Propriétés

Soient a et b deux nombres réels positifs. Alors on :

- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- Si en plus $b \neq 0$, on a: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

- Si $b \neq 0$ on a : $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{b}$
- Si $a \neq b$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

Exemples

- $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
- $\dfrac{5}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{5\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)} = \dfrac{5\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2} = \dfrac{10-5\sqrt{2}}{2}$
- $\dfrac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}} = \dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)}{\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)} = \dfrac{2+2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{15}}{1-5} = -\dfrac{2+2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}$

3 – Puissances

Définition

Soit a un nombre réel et n un entier naturel. On appelle puissance de a d'exposant n, le produit de n facteurs égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois } a}$$

En plus $a^1 = a$ $1^n = 1$ $0^n = 0 \ (n \neq 0)$ $a^0 = 1 (n \neq 0)$

Propriétés des puissances

Soient a et b deux réels non nuls et n et m deux entiers naturels. Alors on a :

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $\left(a^n\right)^m = a^{n\times m}$
- $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ et $\dfrac{1}{a} = a^{-1}$
- $a^n \times b^n = (ab)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

4 – Identités remarquables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$	$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$
	$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$