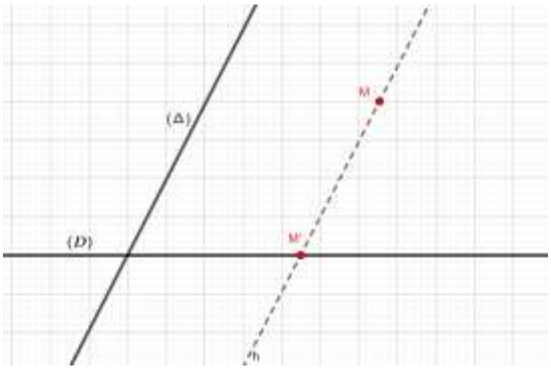
I – Projection sur une droite parrallélement à une autre droite

Définition 1

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes du plan $\mathscr{P}$ et soit M un point du plan $\mathscr{P}$ et M' le point d'intersection de la droite passant par M et parallèle à (Δ) avec la droite (D).

- Le point M' est appelé **le projeté** du point M sur la droite (D) parallèlement à la droite (Δ)
- La relation p qui relie tout point M du plan $\mathscr{P}$ au point M' du plan $\mathscr{P}$ est appelée **projection Sur la droite** (D) parallèlement à la droite (Δ)
- On écrit $p(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$



Remarques

- Lorsque le point M appartient à la droite (D), son projeté sur la droite (D) parallèlement à la droite (Δ) est lui-même c'est-à-dire que $p(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$.
- On dit que **chaque point de la droite** (D) **est invariant par la projection sur la droite** (D) parallèlement à la droite (Δ).
- On dit aussi que **la droite** (D) **est invariante par la projection sur la droite** (D) parallèlement à La droite (Δ)

Définition 2

Soient (D) une droite du plan $\mathscr{P}$ et soit M un point du plan $\mathscr{P}$ et M' le point d'intersection de la droite passant par M et perpendiculaire à (D) avec la droite (D).

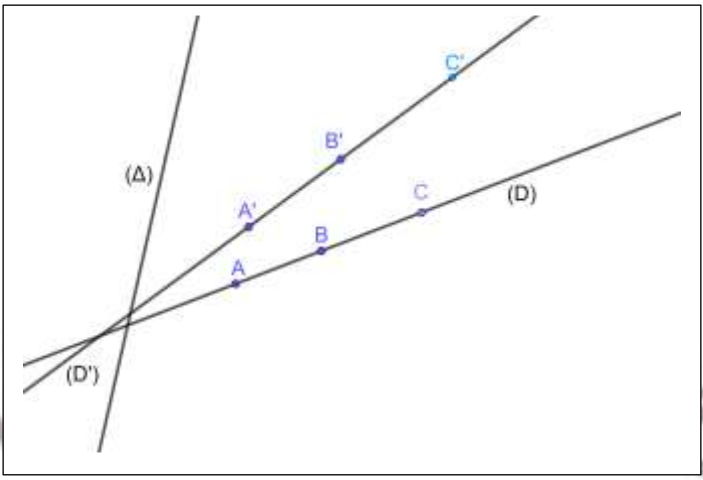
- Le point M' est appelé **le projeté orthogonal** du point M sur la droite (D)
- La relation p qui relie tout point M du plan $\mathscr{P}$ au point M' du plan $\mathscr{P}$ est appelée **projection orthogonale sur la droite** (D)

II – Thérèmes de Thalès avec les projections

Théorème direct de Thalès

Soient (D), (D') et (Δ) trois droites telles que (D), (D') et (Δ) sont sécantes deux à deux.

Soient A, B et C trois points distincts de la droite (D) et soient A', B' et C' les projetés des points A, B et C sur la droite (D') parallèlement à la droite (Δ). Alors : $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$



Réciproque du théorème de Thalès

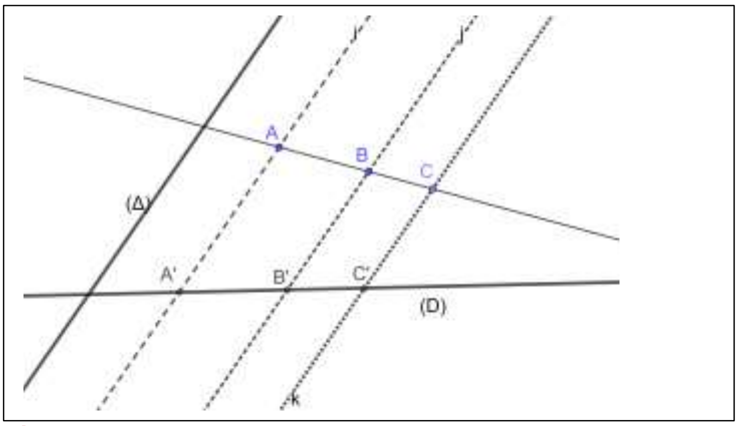
Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes.

Soient A, B et C trois points distincts et alignés du plan $\mathscr{P}$

Soient A' et B' les projetés des points A et B sur la droite (D) parallèlement à la droite (Δ)

Soit C' un point de la droite (D) tel que A', B' et C' sont dans le même ordre que A, B et C et $\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}$

Alors : C' est le projeté de C sur (D) parallèlement à (Δ) et on $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$

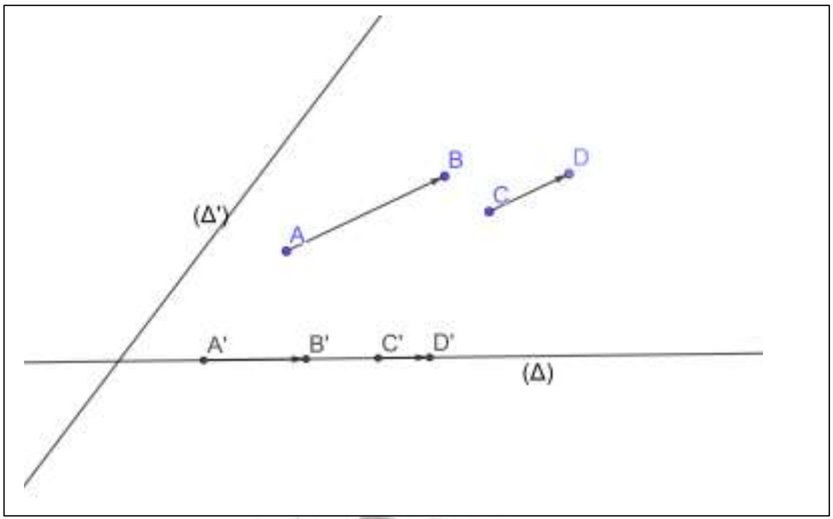


II – Propriétés des projections

Propriété 1 (Conservation du coefficient de colinéarité par une projection)

Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes. Soit p la projection sur la droite (Δ) parallèlement à la droite (Δ') et soient A, B, C et D trois points du plan $\mathscr{P}$ tels que : $\overrightarrow{CD} = k.\overrightarrow{AB}$ où $k \in \mathbb{R}$

Si A', B', C' et D' sont des points du plan $\mathscr{P}$ tels que : $A' = p(A)$, $B' = p(B)$, $C' = p(C)$ et $D' = p(D)$, alors : $\overrightarrow{C'D'} = k.\overrightarrow{A'B'}$

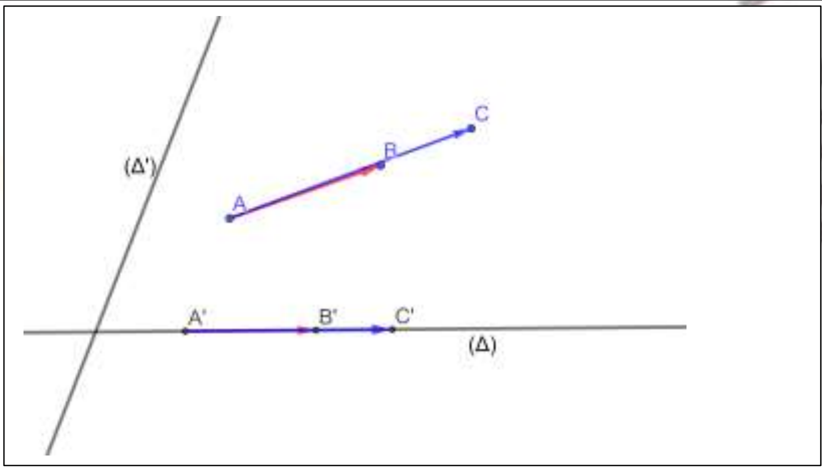


Propriété 2 (Conservation du coefficient d'alignement des points par une projection)

Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes. Soit p la projection sur la droite (Δ) parallèlement à la droite (Δ') et soient A, B et C trois points du plan $\mathscr{P}$ tels que : $\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$ où $k \in \mathbb{R}$

Si A', B' et C' sont des points du plan $\mathscr{P}$ tels que : $A' = p(A)$, $B' = p(B)$ et $C' = p(C)$

Alors : $\overrightarrow{A'C'} = k.\overrightarrow{A'B'}$



Propriété 3 (Conservation des milieux)

Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes. Soit p la projection sur la droite (Δ) parallèlement à la droite (Δ') et soient A et B deux points du plan $\mathscr{P}$ et I le milieu du segment $[AB]$.

Si A', B' et I' sont les points du plan $\mathscr{P}$ tels que $A' = p(A)$, $B' = p(B)$ et $I' = p(I)$, alors :

I' est me milieu de $[A'B']$