



I – Fonction logarithme népérien

1 – Définition

Définition

La fonction **logarithme népérien** est la primitive de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1, on la note **ln** ou **Log**

Conséquences immédiates

- La fonction **ln** est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$
- $\ln(1) = 0$
- $(\forall x \in]0, +\infty[), (\ln x)' = \frac{1}{x}$

2 – Propriétés

Propriété 1

- La fonction **ln** est strictement croissante sur $]0, +\infty[$
- $\forall (a, b) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[; \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\forall (a, b) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[; \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

Propriété 2

$\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[, \forall r \in \mathbb{Q}$ on a :

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\ln(x^r) = r \ln x$
- $\ln x = r \Leftrightarrow x = e^r$
- $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln x$

Propriété 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$



3 – Etude de la fonction \ln

Tableau de variation de \ln

x	0	$+\infty$
$(\ln x)'$		+
$\ln x$	$-\infty$	$+\infty$

Tableau de signe de \ln

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		—	+

4 – Le nombre e :

Proposition

L'équation $\ln x = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$, on la note e et on a $e \approx 2,71828182845904\dots$

Remarque : $\ln(e) = 1$

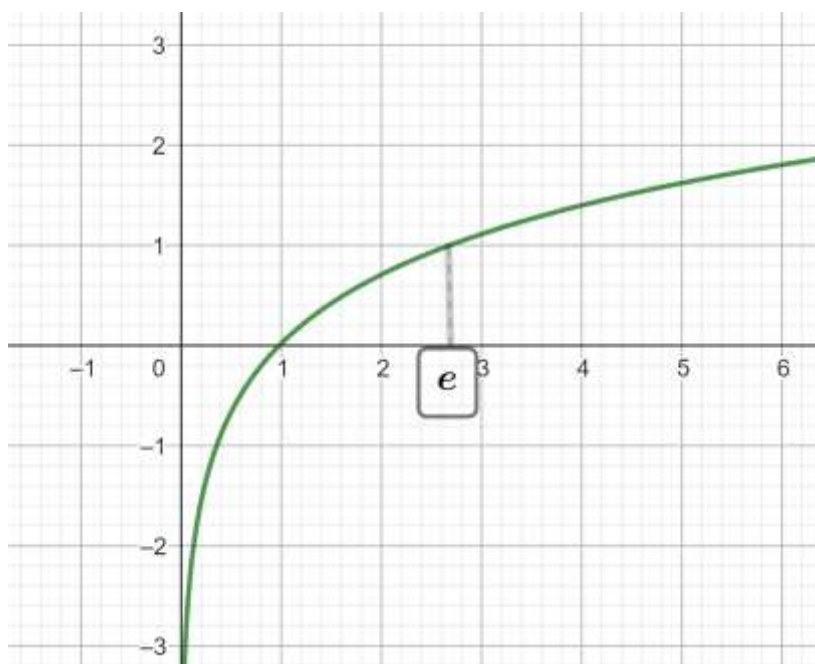
5 – Courbe de la fonction \ln

On a : $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$ donc la courbe représentative de \ln passe par les deux points

De coordonnées $(1,0)$ et $(e,1)$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, alors la courbe de \ln admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$. Et

comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, alors la courbe de \ln admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$



6 – Dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$

Théorème :

Soit u définie sur D_u et dérivable sur D_u . Alors la fonction $f : x \mapsto \ln(u(x))$ est définie sur $D_f = D_u \cap \{x \in D_u / u(x) > 0\}$ et est dérivable sur $D_{f'} = D_u \cap \{x \in D_u / u(x) > 0\}$ et on a :

$$[\ln(u(x))]'' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

II – Fonction logarithme de base a

Soit $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$

Définition

La fonction logarithme de base a est la fonction notée \log_a et définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Remarque : Si $a = 10$ la fonction logarithme de base 10, notée \log_{10} est aussi appelée

« logarithme décimal »

Propriétés

$\forall x \in]0, +\infty[, \forall y \in]0, +\infty[$ et $\forall r \in \mathbb{Q}$, on a les propriétés suivantes :

- $\log_a(1) = 0; \log_a(a) = 1$
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x^r) = r \log_a x$
- $\log_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$

Théorème

La fonction \log_a est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, (\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$$

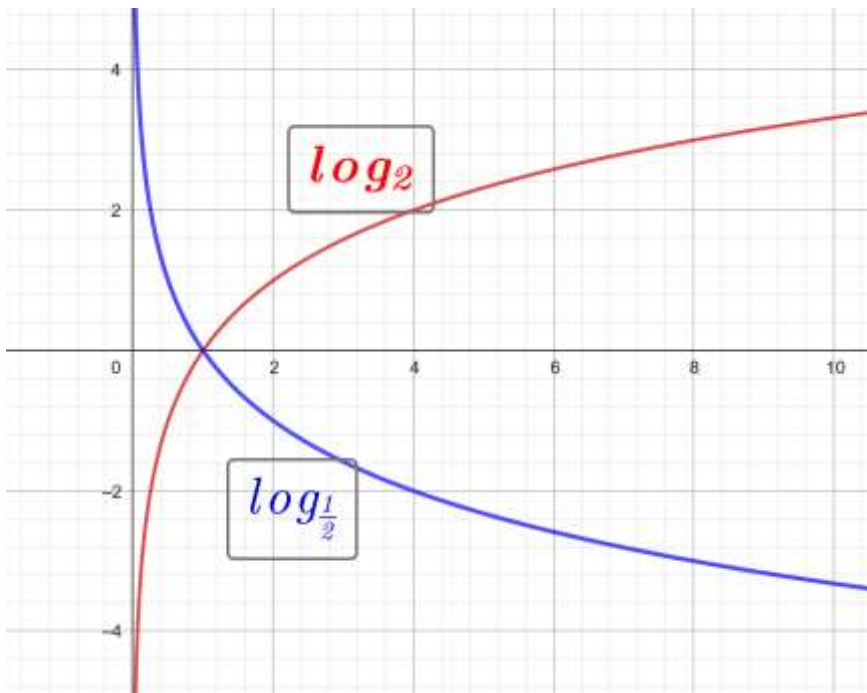
Théorème

- Si $0 < a < 1$, alors la fonction \log_a est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$
- Si $a > 1$, alors la fonction \log_a est strictement croissante sur $]0, +\infty[$



Courbes (C_2) et $(C_{\frac{1}{2}})$ représentatives des fonctions \ln_2 et $\ln_{\frac{1}{2}}$ dans un repère

Orthonormé :



HTT

Smail Eljaafari



MATH.COM