Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{x+1}-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x}-x$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[4]{x^2+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\times\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x^2+7}-5}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+7}-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2\sqrt{2x+8}}{x+\sqrt{x}-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x+2}-5}{x^4-6x-4}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\times E\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Exercice 2

1) Calculer $S=\arctan 2+\arctan 5+\arctan 8$; $T=\arctan 2+\arctan 3$

2) Montrer que $\arctan\left(\dfrac{4}{3}\right)=2\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\arctan\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)+\dfrac{\pi}{2}}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\arctan\left(\sqrt{x}\right)}{\arctan\left(x^2\right)}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)-\pi}{x-1}$

Exercice 4

Soit f une fonction continue et strictement positive sur un intervalle $[a,b]\ (a<b)$

1) Montrer que : $(\exists\alpha>0)(\forall x\in[a,b]),\ f(x)\geq\alpha$

2) Soient g et h deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que : $(\forall x\in[a,b]);\ h(x)>g(x)$

Montrer que : $(\exists\beta>0)(\forall x\in[a,b]);\ h(x)\geq g(x)+\beta$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=x\arctan\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right);\ si\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de la fonction f en $x_0=0$

2) Etudier la parité de la fonction f

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*):\ f(x)=\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{x}{2}\arctan x$

(on pourra poser $x=\tan t$, $avec\ t\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$)

b) En déduire une expression plus simple de f sur $\mathbb{R}_-^*$

4) On considère, dans $\mathbb{R}_+^*$, l'équation (E): $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{x}\right)=\dfrac{5\pi}{12}$

a) Montrer que $(E)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x}\right)=\dfrac{5\pi}{12}\sqrt{x}$

b) En déduire les solutions de l'équation (E)

Exercice 6

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue sur $[0,+\infty[$ telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = L < 1$

Montrer que : $(\exists \alpha \in [0,+\infty[) : f(\alpha) = \alpha$