Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2023}+x^{2022}-2}{x^2-1}$, 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^6-4^3}{x^2-3x+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n}{x-1}$ $(où\ n\in\mathbb{N}^*)$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\cos(2x)+\cos(3x)-3}{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}-2x$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^{2n+1}}{x-1}}-2x\ (n>1)$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}\sqrt{1+2x}-1}{x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}\sqrt{1+2x}\sqrt{1+3x}-1}{x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^{10}\sqrt{2}-2^{10}\sqrt{x}}{x-2}$

Exercice 2

Etudier la continuité de la fonction f en x_0 dans chacun des cas suivants :

1) $\begin{cases} f(x)=xE\left(\dfrac{1}{x}\right);\ si\ x\neq 0 \\ f(0=1 \end{cases}$; $x_0=0$

2) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos^3 x}{x^2};\ si\ x\neq 0 \\ f(0=2 \end{cases}$; $x_0=0$

3) $\begin{cases} f(x)=xE\left(x-\dfrac{1}{x}\right);\ si\ x\neq 0 \\ f(0=-1 \end{cases}$; $x_0=0$

4) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}};\ si\ x\neq 0 \\ f(0=-2 \end{cases}$; $x_0=0$

5) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{1+x^2}}{x} & ;\ si\ x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{\cos x-\sqrt{1+\sin x}}{x}; x<0 \end{cases}$; $x_0=0$

6) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin x-\tan x}{\sqrt{x}} & ;\ si\ x>0 \\ f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right); x<0 \\ g(0)=0 \end{cases}$; $x_0=0$

Exercice 3

Etudier la continuité de la fonction f sur l'intervalle I, dans chacun des cas suivants :

1) $\begin{cases} f(x)=x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x};\ si\ x\neq 0 \\ f(0=0 \end{cases}$; $I=\mathbb{R}$

2) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x};\ si\ x\neq 0 \\ f(0=0 \end{cases}$; $I=[-1,1]$

3) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x^2+4x|-3}{x+3};\ si\ x\neq -3 \\ f(-3)=2 \end{cases}$ $I=\mathbb{R}$

4) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x\sin x}{\cos x-1};\ si\ x\neq 0 \\ f(-3)=-2 \end{cases}$ $I=]-\pi,\pi[$

5) $f(x)=\sin\left(\dfrac{2x+1}{x^2-4}\right)$; $I=]-\infty,-2[$

6) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-5}{x+3}}$; $I=[5,+\infty[$

7) $f(x)=3x\sqrt{x-4}$; $I=[4,+\infty[$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité au point x_0, puis donner ce prolongement :

1) $f(x)=\dfrac{\sin(2x)-2\sin x}{x^3}$; $x_0=0$

2) $f(x)=\dfrac{1-\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sin x}$; $x_0=0$

3) $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+5x-3}{x-1}$; $x_0=1$

4) $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$; $x_0=0$

5) $f(x)=\dfrac{\tan x-1}{2\sin x-\sqrt{2}}$; $x_0=\dfrac{\pi}{4}$

6) $f(x)=\dfrac{1+\cos(2x)}{1-\sin x}$; $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 5

On considère la fonction numérique h définie sur $]-2,1[\cup]1,4[$ par :

$$\begin{cases} h(x)=\dfrac{ax^2-ax}{x^2-5x+4} ; 1<x<4 \\ h(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+x-2} ; -2<x<1 \end{cases}$$

Déterminer la valeur du réel a pour que la fonction h soit prolongeable par continuité en $x_0=1$

Exercice 6

1) Déterminer les deux réels a et b pour que le fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{x^2+x-a}{x-2} ; x>2 \\ g(x)=\dfrac{2x+b}{3} ; x\le 2 \end{cases}$$ soit continue en $x_0=2$

2) Déterminer les deux réels a, b et c pour que le fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{3x^2-2bx+1}{2x^2+ax-a-2} ; x<1 \\ f(x)=\dfrac{-2x^2+3x+3}{x^2+1} ; x>1 \\ f(1)=\dfrac{2+c}{3} \end{cases}$$ soit continue en $x_0=1$

3) Déterminer les deux réels a et b pour que le fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ pour tout entier naturel non nul n par :

$$\begin{cases} f_n(x)=\dfrac{(3-x)^n-a}{x-2} ; x<2 \\ f_n(x)=\dfrac{3x+b}{4} ; x\ge 2 \end{cases}$$ soit continue en $x_0=2$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-1}} ; |x|>1 \\ f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{1-x^2}} ; |x|<1 \end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

2) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

3) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en -1 ?

Exercice 8

On considère la fonction g définie sur $D=\left]-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{\pi}{2},+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = (2x+\pi)\tan x \ ; \ x \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[\\ g(x) = \dfrac{1-\cos^3 x}{x\tan x\cos^2 x} \ ; \ x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[\\ g(x) = \dfrac{3\sqrt{1+x^4}-x}{2+x} \ ; \ x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

1) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} g(x)$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x)$

Etablir que la fonction g est continue en 0