Exercice 1

Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f et $D_{f'}$, l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_{f'}$ dans chacun des cas suivant :

1) $f(x) = 3x^2 - 2\sqrt{x} + \dfrac{2}{x}$

2) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$

3) $f(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right)^3$

4) $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x}$

5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x^2-1}}$

6) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 1}$

7) $f(x) = 3\sin(2x)$

8) $f(x) = 5\cos(3x-2)$

9) $f(x) = \dfrac{2\sin x}{3 - \cos x}$

10) $\begin{cases} f(x) = 2x + \sqrt{x} \;; x \geq 0 \\ f(x) = \sin(2x) \;\; ; \; x < 0 \end{cases}$

11) $f(x) = \dfrac{|x-4|}{2x-3}$

12) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{|x|+1}$

13) $f(x) = \sqrt[4]{x+2}$

14) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{2x-1}}{x}$

15) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 2} - \dfrac{1}{x}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x - \sqrt{x} + 1$ et $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Etudier la branche infinie de la courbe $\left(C_f\right)$

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-1}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f

3) Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $I = \left[0,\dfrac{1}{4}\right]$

a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) Etudier la dérivabilité de la fonction g^{-1} sur J

c) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x \in$ J

d) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in$ J

4) Construire dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, les courbes $\left(C_f\right)$ *et* $\left(C_{g^{-1}}\right)$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) a) Déterminer D_f, l'ensemble de définition de la fonction f

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c) Etudier la branche infinie de la courbe (C_f)

2) a) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}$ *et* $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{f(x)}{x+2}$ et interpréter graphiquement ces Résultats

b) Montrer que $\begin{cases} f'(x)=-\dfrac{3x+3}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}} ;\ si\ -2<x<1 \\ f'(x)=\dfrac{3x+3}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}} ;\ si\ x>1 \end{cases}$

c) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation

3) Construire la courbe (C_f)

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\begin{cases} f(x)=-x+\dfrac{2}{x} ;\ x\in]-\infty,0[\cup]0,1[\\ f(x)=\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}} ;\ x\in[1,+\infty[\end{cases}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) a) Calculer $f(-1)$ et $f(1)$

b) Montrer que la fonction f est continue en $x_0=1$

2) a) Montrer que la fonction f est dérivable à gauche en $x_0=1$

b) Donner l'équation de la demi-tangente (Δ_1) à gauche du point d'abscisse $x_0=1$

c) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0=1$ puis interpréter graphiquement ce résultat

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) Montrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ et déterminer son équation

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et en déduire la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

d) Donner la nature de la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de 0

4) a) Etudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $[1,+\infty[$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f

5) a) Donner l'équation de la tangente (Δ_2) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $-\sqrt{2}$

b) Construire dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C_f) et les droites (D), (Δ_1) et (Δ_2)

6) Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $]-\infty,0[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) Construire la courbe $(C_{g^{-1}})$ représentative de la fonction g dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

c) Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in$ J