



## Exercice 1 :

Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

$$P : "(\forall x \in \mathbb{R}); x \geq 0 \text{ ou } x \leq 0"$$

$$Q : "(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 > 5 \text{ et } x \in \mathbb{Z}"$$

$$R : "(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}); |xy| = xy \Rightarrow (x+y)^2 \geq x^2 + y^2"$$

$$S : "(\forall a \in \mathbb{R}); a^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \mathbb{Z}"$$

$$T : "(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in \mathbb{R}); |x| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{x}{x^2+2} \right| < \varepsilon"$$

$$L : "(\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3); \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{5}"$$

## Exercice 2 :

1/ Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}); -x^2 + x - 1 < 0$ .

2/ On considère la proposition  $P : "(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}); -x^2 + x - 1 \geq y"$

a/ Donner la négation de la proposition  $P$ .

b/ En déduire que la proposition  $P$  est fausse.

## Exercice 3

1/ Montrer que :  $(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall b \in \mathbb{R}^+); \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ .

2/ En déduire que :  $(1 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{15}) \geq 8\sqrt{15}$ .

## Exercice 4

1/ Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation :  $2x^2 - |x-3| - 4 = 0$ .

2/ Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$ , le système : 
$$\begin{cases} 2|x+1| - y = 4 \\ |x+2| + 2y = 6 \end{cases}$$

## Exercice 5

1/ Montrer que :  $(\forall a \in ]1; +\infty[); \frac{a^2}{a-1} \geq 4$ .

2/ Montrer que :  $(\forall a \in ]1; +\infty[)(\forall b \in ]1; +\infty[); \frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8$ .

## Exercice 6

1/ Démontrer que :  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  et  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ .

2/ Montrer que :  $\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2; p + q\sqrt{2} = 0 \Rightarrow p = q = 0$ .

## Exercice 7

1/ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer les restes possibles de la division de  $n^2$  par 5.

2/ Montrer par l'absurde, que :  $\forall n \in \mathbb{N}; \sqrt{5n+7} \notin \mathbb{N}$ .



3/ Montrer par l'absurde que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;  $\sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$ .

### Exercice 8

Montrer par récurrence, que :

1/  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;  $4^{2n+2} - 1$  est un multiple de 15.

2/  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;  $2^{3n} - 1$  est divisible par 7.

3/  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;  $7^{2n} + 3$  est un multiple de 4.

4/  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . (On note :  $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ ).

5/  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;  $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

6/  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;  $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ .

7/  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;  $2^n > n$ .

8/ Soit  $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .

9/  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ .

10/  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ .

11/  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;  $n^3 + 11n$  est un multiple de 6.

12/  $\forall n \in \mathbb{N}$ ; 7 est un diviseur de  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ .

13/  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;  $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$  est un multiple de 17.

14/  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;  $\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$ .

15/  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 6$ ;  $2^n \geq (n+2)^2$ .

16/  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;  $4^n + 6n - 1$  est divisible par 9.

17/  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;  $\sum_{k=1}^n k \times \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4 \times 5^{n+1} - (5+n) \times 4^{n+1}}{5^n}$ .