Exercice 1

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{x(1-x)}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer son ensemble de définition D_f

2) a) Montrer que, pour tout $x\in[0,1[$ on a : $\frac{f(x)}{x-1}=-\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0=1$

c) Interpréter ce résultat graphiquement

3) a) Montrer que, pour tout $x\in]0,1]$ on a : $\frac{f(x)}{x}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en $x_1=0$

c) Interpréter ce résultat graphiquement

4) Etudier la dérivabilité de f sur $[0,1]$

5) a) Montrer que, pour tout $x\in]0,1[$ on a : $f'(x)=\frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation

6) Construire la courbe (C_f)

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x+1+\frac{2}{\sqrt{x-1}}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

b) Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$, puis interpréter le résultat graphiquement

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

d) Montrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera l'équation

e) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ)

2) a) Montrer que, pour tout $x\in D_f$ on a : $f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}$

b) Vérifier que $f'(2)=0$ et donner une interprétation graphique au résultat

c) Montrer que pour tout $x\in]1,2]$, on a $\frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}\leq1$, puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $]1,2]$

d) Montrer que pour tout $x\in[2,+\infty[$, on a $\frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}\geq1$, puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $[2,+\infty[$

e) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur D_f

f) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 5$

3) Construire la droite (Δ), la tangente (T) et la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

4) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [2,+\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) Calculer $g(5)$ et $g'(5)$ et en déduire $\left(g^{-1}\right)'(7)$

c) Construire dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la courbe $(C_{g^{-1}})$ de g^{-1}

Exercice 3

I – Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

b) Calculer les limites de la fonction f aux bornes de D_f

2) Etudier les branches infinies de la courbe (C_f)

3) Montrer que la courbe (C_f) admet un centre de symétrie $\Omega(0,1)$

4) Etudier la dérivabilité de f en 1 à droite et interpréter le résultat géométriquement

5) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$

II – Soit g la fonction numérique définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x) & , si\, x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\\ g(x) = 1+\sqrt{1-x^2} & , si\ x \in]-1,1[\end{cases}$

1) a) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g

b) Montrer que la restriction de g à l'intervalle $]-1,1[$ est paire

2) Montrer que la fonction g est continue en 1

3) Etudier la dérivabilité de g à gauche en 1 et interpréter le résultat géométriquement

4) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$

5) Dresser le tableau de variation de la fonction g

6) Construire (C_g) la courbe représentative de g dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

III – Soit h la restriction de g à l'intervalle $[1,+\infty[$

1) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

2) Montrer que la fonction h^{-1} est dérivable sur J

3) Dresser le tableau de variation de h^{-1}

4) Construire $(C_{h^{-1}})$, la courbe représentative de h^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

5) Déterminer l'expression de $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x+1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

b) Calculer $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x+2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

c) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ)

3) a) Etudier la dérivabilité de la fonction f en 1 à droite et interpréter ce résultat graphiquement

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_f$

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f

4) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I=[1,+\infty[$

a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) Calculer $g\left(\dfrac{5}{3}\right)$ et en déduire $g^{-1}\left(\dfrac{19}{6}\right)$

c) Tracer $(C_{g^{-1}})$ la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$